



O ensino e a aprendizagem de Geometria com  
recurso a materiais manipuláveis: uma experiência  
com alunos do 9.º ano de escolaridade

Andreia Cristina Freitas Abreu

Universidade do Minho  
Instituto de Educação







Universidade do Minho  
Instituto de Educação

ANDREIA CRISTINA FREITAS ABREU

## O ensino e a aprendizagem de Geometria com recurso a materiais manipuláveis: uma experiência com alunos do 9.º ano de escolaridade

Relatório de Estágio  
Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no  
Ensino Secundário

Trabalho realizado sob a orientação da  
**Doutora Maria Helena Martinho**

## DECLARAÇÃO

Nome: Andreia Cristina Freitas Abreu

Endereço eletrónico: aabreu.math@gmail.com

Telemóvel: 917143856

Número do Cartão de Cidadão: 13599530

Título do Relatório:

**O ensino e a aprendizagem de Geometria com recurso a materiais manipuláveis: uma experiência com alunos do 9.º ano de escolaridade.**

Supervisora:

Maria Helena Martinho

Ano de Conclusão: 2013

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário.

É AUTORIZADA A REPRODUÇÃO INTEGRAL DESTES RELATÓRIOS APENAS PARA EFEITOS DE INVESTIGAÇÃO, MEDIANTE DECLARAÇÃO ESCRITA DO INTERESSADO, QUE A TAL SE COMPROMETE.

Universidade do Minho, 31 de outubro de 2013.

## AGRADECIMENTOS

A todos que, de alguma forma, me apoiaram ao longo da realização deste trabalho quero agradecer a compreensão e o carinho que sempre me dedicaram.

À minha orientadora, Professora Doutora Maria Helena Martinho, pela dedicação, interesse e disponibilidade na orientação deste estudo, pelo esclarecimento das dúvidas que foram surgindo e pelas sugestões para as colmatar, bem como pela amizade com que me orientou.

Ao meu orientador, Mestre Paulo Ferreira Correia, por ter-se sempre mostrado interessado na realização deste estudo, bem como por todas as suas ideias e sugestões.

Aos alunos da turma em estudo, pela forma simpática com que me acolheram e pela abertura a novas experiências nas suas aulas de Matemática.

Aos meus pais e à minha irmã, sem os quais esta experiência não teria sido possível. Agradeço o apoio e encorajamento demonstrados e por fazerem de mim a pessoa em que hoje me tornei.

Ao Vítor, por estar sempre presente, pelo companheirismo, confiança, apoio, paciência, e por me ter ajudado no que fosse necessário e sempre sem hesitar.

À Cidália e ao Luís, pela dedicação e ajuda nas traduções de textos.

À Júlia, pela partilha de ideias e pelos momentos vividos durante o estágio.

Obrigada a todos por me terem feito acreditar que seria capaz.



O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA COM RECURSO A MATERIAIS MANIPULÁVEIS:  
UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO 9.º ANO DE ESCOLARIDADE.

Andreia Cristina Freitas Abreu

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Universidade do Minho, 2013

**RESUMO**

O presente relatório teve como principal propósito compreender como é que os alunos se apropriam dos conceitos da Geometria do nono ano de escolaridade quando utilizam materiais manipuláveis e como os utilizam na consolidação desses conceitos. Neste sentido, para ajudar a delinear a estrutura deste estudo, formularam-se três questões orientadoras: 1) Como utilizam os alunos do 9.º ano os materiais manipuláveis na aprendizagem de Geometria?; 2) Que dificuldades revelam os alunos na utilização dos materiais manipuláveis na aprendizagem de Geometria? e 3) Qual a relação entre as perceções dos alunos sobre a influência dos materiais manipuláveis e a sua aprendizagem em Geometria?

Enquanto professora, a preocupação centra-se em proporcionar atividades em que os alunos sejam parte ativa no processo de ensino e aprendizagem da matemática, o que requer uma renovação no modo de organizar e ensinar na aula de matemática. Os materiais manipuláveis aliados a tarefas desafiantes e motivadoras promovem o envolvimento ativo dos alunos nas atividades em sala de aula e permitem a concretização de conceitos.

Tendo em vista os objetivos do estudo, analisou-se o trabalho de uma turma do nono ano de escolaridade, constituída por dezoito alunos, pertencentes ao concelho de Barcelos, em torno de seis tarefas que pressupunham a utilização de diferentes materiais manipuláveis.

O estudo aponta que o sucesso do uso dos materiais manipuláveis em sala de aula, efetivamente, depende do modo como é introduzido em sala de aula, do à vontade do professor com o material, do tipo de material e do tipo de atividade realizada por parte dos alunos que lhe está inerente e da predisposição dos alunos para trabalharem com os materiais. Assim sendo, quando estas condições são favoráveis, os materiais manipuláveis são bons facilitadores para representar e descrever ideias matemáticas. Assim, a sua manipulação e exploração propiciam um ambiente de experiência Matemática, onde os alunos podem testar e provar as suas conjecturas, bem como comunicar as suas ideias, levando-os a apropriarem-se de um conjunto de características geométricas do objeto que lhes dá maior flexibilidade de raciocínio.





TEACHING AND LEARNING GEOMETRY USING MANIPULABLE MATERIALS: AN EXPERIENCE WITH  
9th GRADE STUDENTS

Andreia Cristina Freitas Abreu

Master in Teaching Mathematics in the 3rd Cycle of Basic Education and Secondary Education

University of Minho, 2012

**ABSTRACT**

The main purpose of this report was to understand how students interpret the concepts of ninth grade geometry when they use manipulable materials and how they use them in the consolidation of these concepts. In this sense, to help delineate the structure of this study, three guiding questions were formulated: 1) How are manipulable materials by students in the ninth grade to learn Geometry?; 2) What difficulties do students reveal in the use of manipulable materials in learning Geometry? and 3) What is the relationship between students' perceptions about the influence of manipulable materials and their learning in Geometry?

As teachers, the concern is on providing activities in which students are active in the process of teaching and learning of mathematics, which requires a renewal in organization and teaching in the math class. Manipulable materials combined with motivating and challenging tasks promote the active involvement of students in classroom activities and enable the consolidation of concepts.

In light of the objectives of the study, I analysed the work of a ninth grade class, consisting of eighteen students belonging to the municipality of Barcelos, around six tasks that presupposed using different manipulable materials.

The study points out that the success of the use of manipulable materials in the classroom effectively depends on how it is introduced in the classroom, on the teacher's ease with the material, the type of material and the type of activity performed by the students and the students' predisposition to work with materials. However, when these conditions are favourable, the manipulable materials are good facilitators to represent and describe mathematical ideas. Thus, its handling and operation enable an environment of Mathematical experience, where students can test and prove their conjectures, as well as communicate their ideas, leading them to take in a set of geometrical characteristics of the object which gives them greater flexibility of reasoning.



## ÍNDICE

DECLARAÇÃO .....	ii
AGRADECIMENTOS .....	iii
RESUMO .....	v
ABSTRACT .....	vii
ÍNDICE DE TABELAS .....	xi
ÍNDICE DE QUADROS .....	xii
ÍNDICE DE FIGURAS .....	xiii
Capítulo I – INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Tema, finalidades e objetivos.....	1
1.2. Pertinência.....	2
1.3. Estrutura do relatório.....	3
Capítulo II – ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO .....	5
2.1. O ensino e a aprendizagem da Geometria.....	5
2.2. Os materiais manipuláveis.....	8
2.2.1. Referência histórica.....	8
2.2.2. Tipologia de materiais .....	9
2.2.3. A utilização de materiais manipuláveis em sala de aula.....	13
2.3. Contexto de Intervenção .....	18
2.3.1. Caracterização da escola.....	18
2.3.2. Caracterização da turma .....	20
2.4. Plano Geral de Intervenção.....	22
2.4.1. Metodologias de ensino e aprendizagem.....	22
2.4.2. Estratégias de intervenção e avaliação da ação.....	25
Capítulo III – INTERVENÇÃO.....	29
3.1. Mira.....	31

3.1.1. Tarefa sobre a mediatriz.....	31
3.1.2. Tarefa sobre a bissetriz .....	35
3.2. Régua, compasso e transferidor .....	38
3.2.1. Tarefa <i>Ângulos congruentes</i> .....	39
3.2.2. Tarefa <i>Triângulo SOL</i> .....	41
3.2.3. Tarefa <i>O jogo Angry Birds</i> .....	42
3.3. Recortes de papel .....	48
3.3.1. Tarefa sobre ângulos internos de um polígono convexo .....	49
3.3.2. Tarefa sobre ângulos externos de um polígono convexo .....	54
3.4. Avaliação .....	57
3.5. Percepções dos alunos sobre o uso de materiais manipuláveis na intervenção de ensino.....	67
Capítulo IV – CONCLUSÃO .....	79
4.1. Conclusões .....	79
4.1.1. Como procedem os alunos do 9.º ano na manipulação dos materiais manipuláveis na aprendizagem de geometria? .....	79
4.1.2. Que dificuldades revelam os alunos na utilização dos materiais manipuláveis na aprendizagem de geometria? .....	81
4.1.3. Qual a relação entre as percepções dos alunos sobre a influência dos materiais manipuláveis e a sua aprendizagem em geometria? .....	83
4.2. Implicações para o ensino e aprendizagem .....	85
4.3. Recomendações e limitações .....	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	89
ANEXO I.....	93
ANEXO II.....	97
ANEXO III.....	101
ANEXO IV.....	107
ANEXO V.....	129

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 – Constituição dos grupos de trabalho.....	21
Tabela 2 – Desempenho dos alunos ao longo do ano letivo.....	21
Tabela 3 – Organização da intervenção de ensino centrada no projeto.....	29
Tabela 4 – Tipos de materiais e o seu contexto.....	30
Tabela 5 – Registo das vantagens e desvantagens observadas nas atividades com recurso ao Mira.....	34
Tabela 6 – Registo dos grupos que utilizaram ou não o Mira na resolução da tarefa sobre a bissetriz de um ângulo.....	37
Tabela 7 – Ordem das estratégias de resolução adotadas pelos grupos para a resolução da questão 1.1. da tarefa O jogo Angry Birds.....	44
Tabela 8 – Registo das vantagens e desvantagens observadas na tarefa O jogo Angry Birds.....	47
Tabela 9 – Registo das vantagens e desvantagens observadas nas atividades dos recortes e montagens de papel.....	57
Tabela 10 – Objetivos das questões dos testes.....	58
Tabela 11 – Percentagem de respostas obtidas na questão 7 do primeiro teste do 2.º período.....	60
Tabela 12 – Percentagem de respostas obtidas na questão 6 do segundo teste do 2.º período.....	63
Tabela 13 – Erros/dificuldades cometidas pelos alunos na construção pedida na questão 7.....	64
Tabela 14 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas ao tema Geometria.....	67
Tabela 15 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à dificuldade que sentiram em manipular os materiais de medida e desenho.....	69
Tabela 16 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à aprendizagem com os materiais de medida e desenho.....	71
Tabela 17 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à aprendizagem com o Mira.....	72
Tabela 18 – Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à aprendizagem com recortes e montagem de papel.....	73
Tabela 19 – Vantagens e desvantagens consideradas pelos alunos na intervenção de ensino com materiais manipuláveis.....	75
Tabela 20 – Papel desempenhado pelos elementos do grupo considerado pelos alunos na intervenção de ensino e aprendizagem.....	78

## ÍNDICE DE QUADROS

Quadro 1 – Tipo de procedimento que pretende dar resposta às questões formuladas.....	25
Quadro 2 – Dificuldades apresentadas pelos grupos aquando da realização da atividade sobre a Soma dos Ângulos Internos de um Polígono de $n$ lados.....	50
Quadro 3 – Análise por género e por desempenho das perceções dos alunos sobre Geometria..	68
Quadro 4 – Análise por género e por desempenho das perceções dos alunos sobre a dificuldade em manipular os materiais de medida e desenho antes e depois da intervenção.....	70
Quadro – 5 Análise por género e por desempenho das perceções dos alunos sobre a utilização do Mira no processo de ensino e aprendizagem.....	73
Quadro – 6 Análise por género e por desempenho das perceções dos alunos sobre aprendizagem com materiais manipuláveis.....	74

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representação dos termos referentes aos diversos tipos de materiais.....	12
Figura 2. Esquema da situação referida pelo aluno Dinis.....	32
Figura 3. Esquema da situação referida pela aluna Anita.....	36
Figura 4: Imagem ilustrativa da aplicação feita no Geogebra para a sexta aula.....	48
Figura 5. Produção do aluno José na tarefa sobre ângulos internos de um polígono.....	52
Figura 6. Resolução da aluna Manuela na tarefa sobre a soma de ângulos internos de um polígono.....	53
Figura 7. Resolução da aluna Eduarda na tarefa de ângulos externos de um polígono.....	56
Figura 8. Resolução da questão 7 pelo aluno André.....	60
Figura 9. Resolução da questão 7 pela aluna Adriana.....	61
Figura 10. Resolução da questão 7 pela aluna Jade.....	62
Figura 11. Resolução do aluno André à questão 6.....	64
Figura 12. Resolução da aluna Carla à questão 6.....	65
Figura 13. Resolução da aluna Jade à questão 6.....	66
Figura 14. Resolução da aluna Célia à questão 6.....	66
Figura 15. Resposta apresentada pela aluna Adriana à questão 28 do questionário.....	71
Figura 16. Resposta apresentada pelo aluno Paulo à questão 28 do questionário.....	72
Figura 17. Resposta apresentada pela aluna Elsa à questão 28 do questionário.....	72
Figura 18. Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à aprendizagem com materiais manipuláveis.....	74
Figura 19. Resposta apresentada pela aluna Carla à questão 24 do questionário.....	76
Figura 20. Resposta apresentada pela aluna Elsa à questão 24 do questionário.....	76
Figura 21. Resposta apresentada pela aluna Elsa à questão 25 do questionário.....	76
Figura 22. Resposta apresentada pela aluna Sónia à questão 25 do questionário.....	76
Figura 23. Resposta apresentada pela aluna Adriana à questão 27 do questionário.....	77
Figura 24. Resposta apresentada pelo aluno Dinis à questão 27 do questionário.....	77





## Capítulo I

### INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se o tema em estudo, bem como as suas finalidades, os objetivos tratados e a sua pertinência no contexto da Educação Matemática. Por fim, apresenta-se uma breve descrição da estrutura do relatório.

#### 1.1. Tema, finalidades e objetivos

O argumento deste projeto centra-se no estudo da utilização de materiais manipuláveis no ensino e aprendizagem do tópico circunferência, do tema Geometria, no nono ano de escolaridade. Este tópico pressupõe o estudo de Lugares Geométricos, Circunferência inscrita e Circunferência circunscrita a um triângulo, Ângulos internos e externos de um polígono e Polígono regular inscrito numa circunferência.

Tendo em conta as necessidades colocadas pela sociedade ao longo dos tempos, ocorreram importantes transformações sociais, da indústria e da economia, assim como o processo de ensino e aprendizagem que tem necessariamente de ser adequado às novas exigências. Neste sentido, o processo de ensino e aprendizagem deve criar oportunidades de experiências de aprendizagem, não se limitando a transmitir conhecimentos de forma estanque. Desde longa data que a Geometria tem assumido um papel importante na Matemática e no seu ensino sendo um tema onde os alunos apresentam grandes dificuldades. Atualmente, o propósito principal do ensino desta área do saber centra-se em “desenvolver nos alunos o sentido espacial, (...) a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades para desenvolver problemas em contextos diversos” (Ministério da Educação, 2007, p. 51). Os materiais manipuláveis destacam-se como impulsionadores dessas experiências de aprendizagem, já que:

materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover atividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos. Naturalmente, o essencial é a natureza da atividade intelectual dos alunos, constituindo a utilização de materiais um meio e não um fim. (Ministério da Educação, 2001, p. 71).

Neste sentido, torna-se pertinente a realização de um estudo que tem como objetivo compreender como é que os alunos se apropriam dos conceitos da Geometria do nono ano de

escolaridade quando usam os materiais manipuláveis e que dificuldades surgem inerentes à utilização desses materiais.

No contexto desta problemática e com o intuito de estudar esta questão definiram-se as seguintes questões de investigação:

Q1 – Como utilizam os alunos do 9.º ano os materiais manipuláveis na aprendizagem de Geometria?

Q2 - Que dificuldades revelam os alunos na utilização dos materiais manipuláveis na aprendizagem de geometria?

Q3 - Qual a relação entre as perceções dos alunos sobre a influência dos materiais manipuláveis e a sua aprendizagem em geometria?

## **1.2. Pertinência**

A Geometria é um dos grandes temas matemáticos abordada na escola desde o 1.º ciclo do ensino básico.

Atualmente defende-se que os aspetos visuais devem estar sempre presentes no ensino da Geometria e, como tal, é importante que os alunos, mais do que “confiar” apenas nas palavras, nos números e nos procedimentos, devem “aprender a ver”, o que só é possível com a experiência seguida de reflexão (Veloso, 2000). Como referem Abrantes, Serrazina e Oliveira, a Geometria aparece como meio de conhecimento do “(...) espaço em que se move, pelo que se torna importante promover a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação” (1999, p. 67). Os materiais manipuláveis surgem como fortes auxiliares do processo de ensino e aprendizagem que impulsionam esta visão construtivista de ensino. Ao longo do percurso escolar, além dos materiais básicos, como a régua, o compasso, o esquadro e o transferidor, é importante que os alunos tenham a oportunidade de manipular outro tipo de materiais, e que o professor esteja atento às dificuldades e erros que estes materiais acarretam na resolução das atividades.

Como refere Abrantes (1999),

fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas (p. 4).

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) nas orientações metodológicas gerais defende que “os alunos devem utilizar materiais manipuláveis na aprendizagem de

diversos conceitos (...). Na Geometria é ainda essencial o uso de instrumentos como a régua, esquadro, compasso e transferidor (...)" (p. 9).

O 9.º ano de escolaridade é um ano pertinente para abordar estas questões, pois é um ano em que está previsto no currículo que os alunos utilizem materiais de medida e desenho com regularidade para construções geométricas. Com o recurso a esses e outros materiais, os alunos podem ser estimulados a envolverem-se nas atividades para que ocorra uma aprendizagem significativa.

### **1.3. Estrutura do relatório**

O presente relatório de estágio está organizado em quatro capítulos.

No capítulo I, *Introdução*, apresenta-se o tema e as suas finalidades, os objetivos de estudo e a sua pertinência.

No capítulo II, *Enquadramento Contextual e Teórico*, justifica-se a relevância do projeto, à luz do contexto e da literatura. Numa primeira fase, discute-se a importância do ensino e aprendizagem da Geometria fazendo referência às recomendações dos atuais documentos oficiais. De seguida, apresenta-se uma referência histórica sobre a utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem, a tipologia de materiais que existe e as implicações que o recurso a materiais manipuláveis acarreta, apontadas por vários autores que justificam a sua utilização no processo de ensino e aprendizagem. Por último, dá-se a conhecer o contexto de intervenção e apresenta-se o plano geral da intervenção onde se dá a conhecer as metodologias e estratégias de investigação e avaliação da ação utilizadas no projeto.

No capítulo III, *Intervenção*, descrevem-se e analisam-se os episódios mais representativos da atividade realizada pelos alunos durante a manipulação dos materiais manipuláveis, com vista a dar resposta às questões de investigação. Para tal, são analisadas produções escritas dos alunos, diálogos ocorridos no contexto de sala de aula, entre os alunos e entre estes e a professora durante a realização das tarefas e instrumentos de avaliação realizados durante o período de intervenção.

Por fim, no capítulo IV, *Conclusão*, procura-se sintetizar as principais conclusões provenientes da análise do capítulo anterior, com vista a responder às questões deste estudo. Também são indicadas referências às limitações deste estudo e são apresentadas algumas recomendações que emergem do estudo.



## Capítulo II

### ENQUADRAMENTO CONTEXTUAL E TEÓRICO

Este capítulo incide sobre a pesquisa, a importância do ensino e aprendizagem da Geometria e a importância do uso de materiais manipuláveis na sala de aula. Mais ainda, para que se perceba a envolvente onde este estudo foi desenvolvido, procede-se a uma contextualização da intervenção, bem como a apresentação do plano geral da intervenção.

#### 2.1. O ensino e a aprendizagem da Geometria

Neste subcapítulo apresentam-se os objetivos e finalidades da Matemática como uma competência indispensável de adquirir, salientando a importância do ensino e aprendizagem da Geometria, à luz das teorias de ensino atuais.

Enquanto professores, é importante transmitir que a “(...) a escola existe porque enquanto se reconhece a necessidade de, através dela, veicular, desenvolver e fazer adquirir, um currículo ou corpo de aprendizagens – seja o que for que se considere dever constitui-lo” (Roldão, 1999, p. 19). A Matemática é, desde sempre, parte do currículo escolar pois é uma disciplina que desenvolve competências úteis e importantes para todos os cidadãos. De acordo com Freudenthal, a matemática que se ensina deve ser relevante para quem aprende e para a sociedade, de modo a construir um valor humano, em vez de ser encarada como um conteúdo a transmitir. O ensino da matemática torna-se, então, importante na medida em que contribui para o desenvolvimento de múltiplas competências, como o desenvolvimento tecnológico e socioeconómico da sociedade e o desenvolvimento político, ideológico e cultural da sociedade, e proporciona aos indivíduos a capacidade de destreza em múltiplas situações do dia-a-dia (Vale, 2000).

A Matemática, desde há muito tempo que, de uma forma geral, tem sido encarada como um conhecimento acabado. Atualmente, esta visão da matemática tende a ser contraposta e é considerada como um conhecimento em constante descoberta e construção. Em muitos dos casos, os alunos adquirem uma afetividade negativa para com a Matemática desde os níveis de ensino mais elementares, devido à inadequada introdução dos temas matemáticos (Vale, 2000). Esta visão de uma Matemática acabada associada a um modelo de ensino centrado na atividade do professor, entre outros aspetos, foram motivos para se justificar o elevado insucesso desta disciplina ao longo dos últimos anos. No entanto, as entidades interventivas na área da educação

e da didática da matemática (eg. Associação de Professores de Matemática (APM), Ministério da Educação (ME), National Council of Supervisors of Mathematics (NCTM),) apontam recomendações do que se deve ter em consideração para que esta situação se altere. Assim, essas recomendações são no sentido de se refletir sobre a exposição pelo professor nas salas de aula, a discussão professor-aluno e aluno-aluno, o desenvolvimento do trabalho prático, a consolidação e prática de rotinas e competências, a resolução de atividades com aplicação a situações da vida real, mas também de carácter puramente matemático e ainda o trabalho de exploração e investigação. Assim, o modelo de ensino tem de se adaptar a esta visão da Matemática, onde se privilegia aspetos e competências que vão para além da acumulação de factos, regras, teoremas e procedimentos.

Esta visão do ensino requer um papel mais ativo e interventivo por parte do aluno. O professor, por sua vez, não deixa de assumir um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, pois é ele quem decide o tipo de atividades que melhor se adequa ao grupo de alunos com que trabalhar, a sequência pela qual as implementa, o local e duração necessário para a sua resolução, a forma como avalia as mesmas, os materiais que utiliza, as estratégias que adota em sala de aula, entre muitos outros aspetos. Todo este processo requer dos professores uma ação mais esclarecida e interveniente, de modo que para cada situação tenham opiniões bem fundamentadas. Neste sentido, “cabe-lhes uma responsabilidade acrescida nas opções, decisões e estratégias relativas ao currículo, na seleção crítica e na produção de matérias curriculares, no seu ajustamento e na sua avaliação” (Almiro, 2004).

A Geometria é uma área que comporta uma componente prática forte no dia-a-dia da sociedade, sendo este um ramo da matemática que sempre esteve presente em múltiplos campos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999), como na produção industrial, no *design*, na arquitetura, na topografia, nas artes plásticas, nos elementos da natureza, entre outros. Assim, “a Geometria proporciona um meio de descrição, análise e compreensão do mundo e da beleza visual das suas estruturas” (NCTM, 2008, p. 365). Neste sentido, o *Curriculo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (ME, 2001) estabelece as competências que todos devem desenvolver, no domínio da Geometria, das grandezas e da medida, ao longo de todo o ensino básico, que inclui os seguintes aspetos:

- Aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a software geométrico;

- A aptidão para utilizar a visualização e o raciocínio espacial na análise de situações e na resolução de problemas em Geometria e em outras áreas da matemática;
- A compreensão dos conceitos de comprimento e perímetro, área, volume e amplitude, assim como a aptidão para utilizar conhecimentos sobre estes conceitos na resolução e formulação de problemas;
- A aptidão para efetuar medições e estimativas em situações diversas, bem como a compreensão do sistema internacional de unidades;
- A predisposição para procurar e explorar padrões geométricos e o gosto por investigar propriedades e relações geométricas;
- A aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- A sensibilidade para apreciar a Geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações, nomeadamente na comunicação (p. 62).

A Geometria é um ramo da Matemática que, desde sempre, foi parte integrante desta disciplina, sendo-lhe atribuído mais ou menos ênfase, e manteve-se a par da evolução do currículo. No entanto, alguns autores ferem que não existe concordância quanto aos conteúdos da Geometria que devem ser abordados em cada ano de escolaridade.

Ao contrário da controvérsia que existe em volta dos conteúdos que devem ser abordados, o modo como esta disciplina deve ser lecionada reúne maior consenso entre os investigadores do ensino da matemática. Como refere Vale (1999), devido ao carácter concretizador da Geometria, esta sugere “(...) um ensino em que qualquer opção de estratégia utilize material manipulável além dos correntes materiais de desenho assim como sugere abordagens através de uma grande variedade de situações problemáticas” (p. 120). É de consenso geral que a Geometria é um “(...) campo propício ao desenvolvimento do pensamento matemático, assim como à realização de investigações e outras atividades que envolvem aspetos essenciais da natureza da matemática, como fazer conjecturas e validar essas conjecturas” (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999, p. 68). Vários referentes (eg. NCTM (1998, 2001, 2008), ME (2001, 2007), Matos e Serrazina (1996), Vale (1999, 2002)) defendem que, uma vez que a Geometria é essencialmente um meio para o aluno conhecer o espaço em que se move, a aprendizagem baseada na experimentação e na manipulação torna-se essencial. Assim, defende-se que os conhecimentos geométricos são adquiridos mais eficazmente pelo contacto e manipulação das figuras, desde os níveis mais elementares até ao ensino secundário (Vale, 1999).

Neste sentido, veremos de seguida como se procede as atividades de manipulação em sala de aula e de que tipo de materiais estamos a falar.

## 2.2. Os materiais manipuláveis

Neste subcapítulo apresenta-se uma breve referência histórica sobre a introdução dos materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem. De seguida, apresenta-se a tipologia de materiais existentes, bem como a sua importância em sala de aula, à luz da literatura consultada.

### 2.2.1. Referência histórica

Existem referências históricas, desde os tempos mais remotos, da utilização de materiais, pelo Homem, para desenvolver competências matemáticas. Como documentam Botas (2008), Vale (2002) e Velosa (2008), basta pensar no homem primitivo que começou por usar objetos, nomeadamente nós numa corda, pedras e marcas no bastão, como símbolos para representar os números, de forma a poderem, por exemplo, fazer a contagem dos animais no rebanho. Anos mais tarde, com o aparecimento do sistema indo-árabe, surgiu o primeiro instrumento com o intuito de facilitar o cálculo aritmético, o ábaco. No entanto, por volta do século XV, dá-se o domínio das regras de cálculo, pelo que a utilização do ábaco tornou-se desnecessária. Assim, os métodos de ensino baseavam-se em instruções e regras que os alunos deviam de mecanizar (Vale, 1999). Todavia, existem gravuras do séc. XVI onde se pode ver o uso da régua, compasso e esquadro. Assim, pensa-se que estes instrumentos surgiram nesta época, aliados à Geometria. No séc. XIX, os fundadores da Escola Ativa, Comenius e Pestalozzi e, mais tarde Decroly e Montessori, defendiam o ensino da Matemática utilizando materiais manipuláveis, pelo que estes passaram a ser reintroduzidos nas escolas. Desde então, vários pedagogos introduziram novos materiais didáticos e metodologias de ensino diferentes. Segundo Rocco e Flores (2010), em meados de 1950 deu-se uma tendência mundial de renovação no ensino da Matemática. Com esta mudança e com o trabalho de Piaget sobre as estruturas mentais, há a necessidade de tratar a Matemática de forma mais intuitiva e, como tal, recorre-se aos materiais didáticos. Piaget apresenta uma teoria, diferente das apresentadas até então, para a utilização dos materiais em sala de aula. Segundo este, os alunos devem ter contacto com os materiais, já que, ao manipulá-los surgem imagens mentais mais claras e podem representar-se ideias abstratas mais completamente do que para aqueles cujas experiências são mais pobres (Vale, 1999; Velosa, 2008).

Como se pode constatar, desde longa data que é defendida a introdução dos materiais em sala de aula. No entanto, em Portugal, desde a publicação da obra *O geoplano na sala de*



*aula*, publicado pela APM, em 1988, gera-se um movimento que impulsiona, até aos dias de hoje, o uso dos materiais manipuláveis em sala de aula (Velo, 2000). Atualmente, existem centenas de materiais plausíveis de serem utilizados em sala de aula, desde que sejam bem dominados pelo professor, pois a introdução de materiais altera a dinâmica de uma aula à luz do ensino dito tradicional.

### 2.2.2. Tipologia de materiais

Ao longo da realização deste relatório não foi possível encontrar investigações cujo objetivo estivesse na clarificação e definição de material didático, material manipulável, material concreto, entre outros. Os vários conceitos encontrados em diferentes investigações deixam transparecer um pouco de confusão, donde se pode inferir que, como refere Botas (2008), a ideia de clarificar os conceitos pode ser complexa e, por vezes, podem confundir-se os conceitos, nomeadamente o de material manipulável. Assim, no sentido de clarificar os vários conceitos, apresenta-se de seguida opiniões de vários autores e, por fim, um entendimento dos conceitos no âmbito deste estudo.

Segundo Botas (2008), os materiais didáticos são

“(...) recursos, materiais manipuláveis, calculadoras, manuais escolares, fichas e guiões de grupo e outros mais, que possibilitam ao professor desenvolver um ensino centrado no aluno e na sala de aula e que auxiliam a aprendizagem desenvolvendo uma atitude positiva nos alunos face à matemática” (p.30).

Também Lorenzato (2006) e Vale (2002) são a favor de designar por material didático qualquer instrumento/material a que o professor recorre para o processo de ensino e aprendizagem. Assim, o giz, a calculadora, o filme, o livro, um quebra-cabeças, um jogo, uma embalagem ou uma transparência, são exemplos de materiais que, quando utilizados no processo de ensino e aprendizagem, são considerados materiais didáticos. Assim, para estes autores, materiais didáticos são todos aqueles materiais que auxiliam o professor a lecionar para que os alunos tenham a oportunidade de compreender e de concretizar conceitos matemáticos, ou seja, são todos os materiais a que se recorre para promover o ensino e aprendizagem. Vale (2002) divide os materiais didáticos em três tipos: concretos, pictóricos e abstratos/simbólicos. Por materiais concretos, entende-se todos os materiais que “permitem que os alunos trabalhem em contacto direto com eles; permitem uma representação de uma ideia matemática através de objetos a três dimensões” (Vale, 2002, p. 7). Os materiais pictóricos caracterizam-se pelas apresentações audiovisuais, as demonstrações do professor ou os desenhos e imagens de

materiais concretos. Os materiais simbólicos são aqueles que permitem uma representação através de numerais e sinais aceites universalmente e que indicam uma operação ou relação matemática (Vale, 2002).

No entanto, para Graells (2000), existe diferença entre material didático e recurso educativo. Considera por recurso educativo qualquer material que no contexto educativo pode facilitar a aprendizagem, e considera por material didático qualquer material elaborado com a intenção específica de facilitar o processo de ensino e aprendizagem. Segundo este autor, um recurso educativo que se utilize numa situação de ensino e aprendizagem pode ser ou não um material didático. Assim, um material didático pode ser um recurso educativo, mas o contrário já não acontece. Para que se perceba melhor a distinção, o autor apresenta o exemplo de um vídeo que é um recurso educativo, mas não é um material didático. Assim, um vídeo que tenha como intenção mostrar o que são os vulcões e as suas dinâmicas será um material educativo, pois pretende ensinar. No entanto, um vídeo de uma reportagem sobre vulcões pode ser utilizado como recurso educativo, mas não é em si um material didático.

Gimeno (in Pires, 2006, p. 1) define, ainda, materiais curriculares como sendo, “todos aqueles ‘artefactos’, impressos ou não, cuja função é a de servir como veículos para ensinar e aprender algo, que são utilizados no desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem e, portanto, de uso nas aulas”.

Repare-se que, segundo Botas (2008), Lorenzato (2006) e Vale (2002), os materiais didáticos são todos os materiais específicos do ensino ou do dia-a-dia, a que o professor se socorre no processo de ensino e aprendizagem. No entanto, Graells (2000) designa esses materiais por recursos educativos, atribuindo a designação de material didático a todo o material que é construído com o único propósito de auxiliar o processo de ensino e aprendizagem. Por outro lado, Gimeno designa todos os materiais que permitem auxiliar o ensino por materiais curriculares.

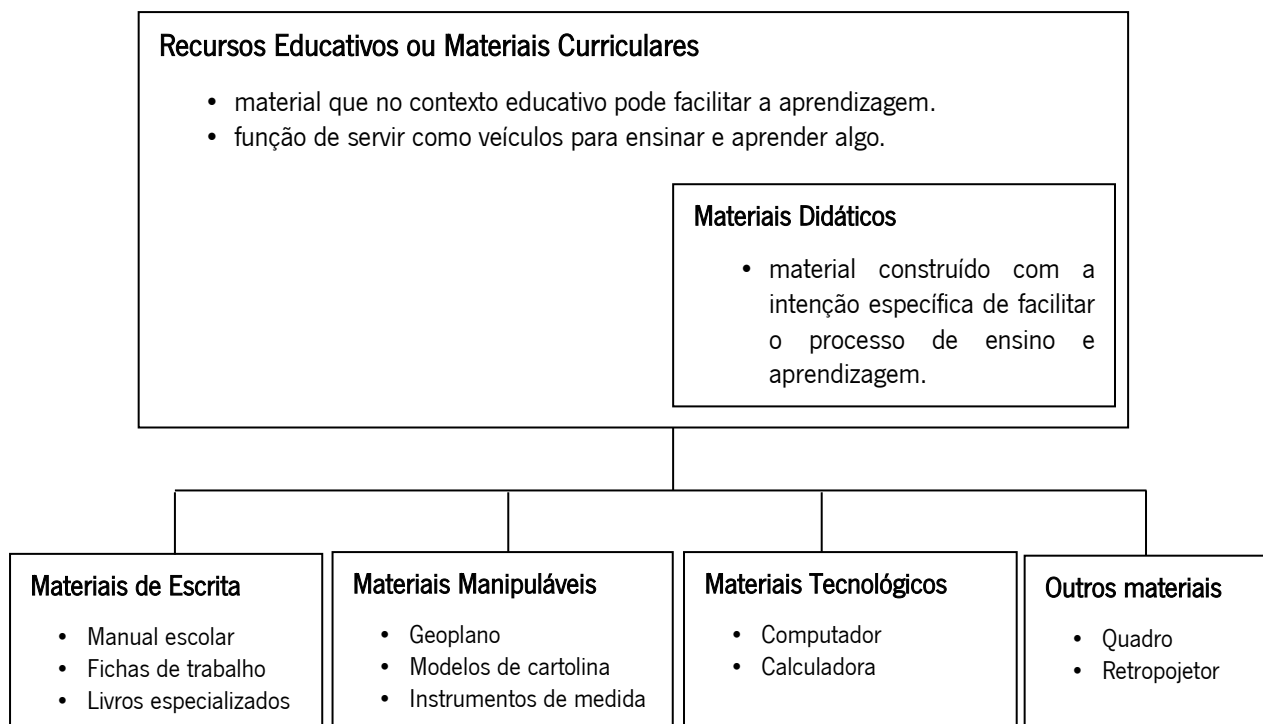
Existe uma grande diversidade de materiais com diferentes formatos, de diferentes naturezas e com diferentes funções. Assim, vários autores apresentam diferentes categorias dos materiais. Segundo Pires (2006), os materiais curriculares podem ser agrupados em: (i) materiais de escrita, tendo como exemplos o manual e as fichas de trabalho; (ii) materiais manipuláveis, como o geoplano, modelos em cartolina ou instrumentos de medida; (iii) materiais tecnológicos, como o computador ou a calculadora; e (iv) outros materiais, como o quadro preto ou o projetor.

Os materiais manipuláveis são materiais com uma especificidade que, teoricamente e de modo geral, é entendida da mesma forma por diferentes autores, mas que, na prática, torna-se difícil de aplicar. Segundo Vale (1999), é de senso comum entender-se um “(...) material manipulável como sendo todo o material concreto, de uso comum ou educacional, que permita, durante uma situação de aprendizagem, apelar para os vários sentidos dos alunos devendo ser manipulados e que se caracterizam pelo envolvimento ativo dos alunos” (p. 112). Esta autora ressalta que tradicionalmente caracteriza-se material manipulável como um material concreto, o que é errôneo, pois nem todos os materiais concretos são materiais manipuláveis. A título de exemplo, remete para o livro de texto que é um material concreto mas não é manipulável. Mais ainda, esta autora relembra que nem todos os materiais didáticos são manipuláveis.

Segundo Reys (1971), os materiais manipuláveis “podem ser objetos reais que têm aplicação no dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia” (in Matos & Serrazina, 1996, p. 193). Ainda segundo este autor, “materiais manipuláveis são objetos ou coisas que o aluno seja capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação nos afazeres do dia-a-dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia” (1982, in Vale, 2002, p. 5).

Neste sentido, Velosa (2008) refere que pode agrupar-se os materiais manipuláveis em duas categorias: estruturados e não estruturados. Esta autora refere que os materiais estruturados foram construídos com objetivos específicos para o ensino da Matemática, como por exemplo, geoplanos, sólidos geométricos, régua, compassos, blocos lógicos, ábacos, entre outros. Em contrapartida, os materiais manipuláveis não estruturados são objetos diversos do dia-a-dia, como por exemplo, palhinhas, embalagens, mosaicos, papéis de embrulho, feijões, entre outros.

Tendo em conta a revisão da literatura efetuada e para que não haja ambiguidades quanto à utilização dos termos ao longo deste relatório, a figura 1 apresenta um esquema para se perceber melhor como cada uma das designações é entendida.



*Figura 1.* Representação dos termos referentes aos diversos tipos de materiais.

No processo de ensino e aprendizagem, tanto o professor como o aluno socorrem-se de material para auxiliar a transmissão do conhecimento. Todo o material que é utilizado neste âmbito é entendido como sendo um recurso educativo ou material curricular. Dentro destes materiais, existem alguns que são materiais aproveitados das necessidades do dia-a-dia e outros que são construídos propositadamente para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem, sendo os últimos entendidos como materiais didáticos.

Os materiais de escrita são todos aqueles materiais que os alunos utilizam com o principal propósito de exercer a atividade matemática, exclusivamente, por meio da leitura, análise e escrita. Assim, o manual escolar, as fichas de trabalho, as fichas de avaliação e os livros especializados, são exemplos de materiais de escrita que auxiliam a aprendizagem.

Será adotada a caracterização de materiais manipuláveis como sendo todo o tipo de material suscetível de, numa situação de aprendizagem, ser manipulado, manejado com as mãos e alterado pelo aluno, com a finalidade de descobrir relações e propriedades e elaborar conjecturas matemáticas sobre as alterações que observa. Tal como na conceção de Hartshort e Boren (1990), material manipulável refere-se a objetos que podem ser tocados e maneados pelos alunos, para introduzir ou reforçar um conceito matemático. A título de exemplo, os que desde longa data se encontram no ensino e aprendizagem da Geometria, o material de desenho e medida, ou seja, a régua, o compasso, o transferidor e o esquadro. Ainda podemos referir o

Mira, que é um material de origem americana que, segundo Fonseca, Palhares e Pimentel (1990) parece ser altamente motivador, já que “associa a propriedade de reflexão do espelho à transparência, de modo a fornecer uma nova abordagem informal e cativante da Geometria, desenvolvendo atitudes como a curiosidade, o espírito de pesquisa e a criatividade” (p. 15). Ainda como exemplo, outro material manipulável com um grande potencial em sala de aula é o papel associado a atividades de dobragem e recorte. Como refere Olson (1975), “formar retas por vincos num pedaço de papel é uma forma interessante de descobrir e demonstrar relações entre retas e ângulos” (p. 1) pelo que os métodos necessários evocar neste tipo de atividade são tão singulares e os resultados tão facilmente alcançáveis que os alunos facilmente sentem entusiasmo (Row's, 1979).

Os materiais tecnológicos caracterizam-se por uma associação de dispositivos técnicos que formatam informação variada. São exemplos de materiais tecnológicos as calculadoras, os simuladores, as aplicações de computador, como, por exemplo o excel, o geogebra ou o winplot, que propiciam um ambiente de aprendizagem dinâmico e vão ao encontro das recomendações atuais do ensino. Atualmente, estes materiais são recomendados por muitos autores uma vez que são entendidos como fortes meios impulsionadores e facilitadores da aprendizagem.

Todo o tipo de material que se utilize no processo de ensino e aprendizagem que não entre nestas três subcategorias surge como sendo outros materiais. A título de exemplo, pode-se pensar no quadro da sala de aula, nos retroprojetores, nos lápis e canetas utilizados para registar informações.

### **2.2.3. A utilização de materiais manipuláveis em sala de aula**

A implementação de atividades em sala de aula com recurso a materiais manipuláveis deve ser rigorosamente pensada. Assim, ao longo deste texto pretende-se perceber a influência que os materiais manipuláveis têm no processo de ensino e aprendizagem, bem como aspetos que se deve ter em conta na implementação das atividades com recurso a estes materiais.

A maior parte dos estudos realizados têm sido inconclusivos quanto aos benefícios do uso de materiais manipuláveis em sala de aula. Matos e Serrazina (1996) realçam o facto de em muitas das investigações realizadas existirem fortes evidências “que permitem afirmar que ambientes onde se faça uso de materiais manipuláveis favorecem a aprendizagem e desenvolvem nos alunos uma atitude mais positiva” (p. 193). No entanto, também salientam

que existem investigações não conclusivas sobre a eficácia dos materiais concretos em sala de aula.

Para Pires (2006), a utilização dos materiais pelos professores não ocorre sempre da mesma forma e o efeito do uso desses materiais numa aula depende da exploração que é feita pelos alunos. Um estudo realizado por este autor revela que todos os professores do seu estudo

reconhecem o papel central dos materiais curriculares no processo de ensino e aprendizagem como recursos para a concretização de conceitos, procedimentos e ideias matemáticas, ajudando a apoiar o seu trabalho docente e a favorecer a aprendizagem dos seus alunos, encaminhando-os para estádios mais formais e abstratos (p. 12).

Mais ainda, revela que, à medida que o grau de ensino aumenta, a utilização de materiais curriculares nas aulas diminui. Vários estudos dão conta de que o uso de materiais manipuláveis é mais frequente no 1.º ciclo de estudos (Vale, 1999, 2000; Lorenzato, 2006; APM, 1998; Velosa, 2008; Veloso, 2000). No entanto, apesar do uso de materiais manipuláveis ser mais frequente nos níveis de ensino iniciais, os materiais tecnológicos são mais frequentes no ensino secundário.

Em Portugal, o relatório *Matemática 2001* (APM, 1998) prende-se num estudo sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática nos diversos níveis de ensino, apresentando alguns resultados relativamente ao uso de materiais manipuláveis e, ainda, avança com um conjunto de recomendações. Este estudo revela que 80% dos professores utiliza o manual adotado nas suas práticas letivas, sendo este o material didático mais utilizado, seguindo-se as fichas de trabalho utilizadas por pouco mais de 60% dos professores. Relativamente aos materiais manipuláveis e aos jogos didáticos, este estudo revela que a frequência de utilização é muito baixa, já que cerca de 90% dos professores, em cada ciclo, raramente os utilizou. Pode-se ainda inferir que a frequência da sua utilização decresce à medida que se progride no nível de ensino. Os professores apontam como principais causas para tal facto o fraco apetrechamento das escolas com este tipo de material e a falta de conhecimento e familiaridade com os mesmos. Contudo, o estudo refere que os professores são unânimes e reconhecem que a aprendizagem é fortalecida quando os alunos se envolvem ativamente com os materiais. Assim, os autores deste estudo recomendam que

a prática pedagógica deve utilizar situações de trabalho que envolvam contextos diversificados (nomeadamente, situações da realidade e da História da Matemática) e a utilização de materiais que proporcionem um forte envolvimento

dos alunos na aprendizagem, nomeadamente os materiais manipuláveis, calculadoras e computadores (p. 44).

Para Hiebert e Carpenter (1992) a existência de estudos com diferentes conclusões quanto à utilização dos materiais manipuláveis em sala de aula tem várias explicações, pois,

se os alunos não trazem com eles os conhecimentos que o professor espera, não é fácil para os alunos relacionarem as suas interações com os materiais e com as estruturas existentes. Eles não interpretam os materiais como o professor espera e o uso de materiais concretos dará provavelmente apenas a conexões ao acaso (Matos & Serrazina, 1996, p. 196).

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) também apresenta recomendações no sentido de que os alunos devem utilizar materiais manipuláveis na aprendizagem de diversos conceitos, incluindo de forma obrigatória a régua, o esquadro, o compasso e o transferidor. O *Curriculo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (ME, 2001) também recomenda que os alunos devem ter, frequentemente, oportunidade de utilizar materiais manipuláveis. Mais ainda, este refere que,

materiais manipuláveis de diversos tipos são, ao longo de toda a escolaridade, um recurso privilegiado com ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares, em particular das que visam promover atividades de investigação e a comunicação matemática entre os alunos. Naturalmente, o essencial é a natureza da atividade intelectual dos alunos, constituindo a utilização de materiais um meio e não um fim.

Segundo Veloso (2000) “(...) os materiais manipuláveis devem estar presentes no ensino da Geometria ao longo de toda a escolaridade (...); apenas dessa forma é possível ir construindo uma “memória” de imagens que serão suporte de experiências de visualização progressivamente mais complexas” (p. 131). Ao manipular os materiais, o aluno é estimulado a pensar por si, o que permite que este estabeleça relações entre conceitos já aprendidos e conjecture novos conceitos.

Vários estudos concluem que, independentemente da idade ou do conteúdo, o desenvolvimento de um indivíduo progride do pensamento concreto para o abstrato (Matos & Serrazina, 1996). Assim, um dos fundamentos para o uso de materiais manipuláveis em sala de aula encontra-se no poder de auxiliar a passagem do concreto para o abstrato, já que “(...) em muitas circunstâncias é indispensável a concretização de situações para ajudar os alunos na compreensão dos problemas e dos conceitos” (Almiro, 2004, p. 8). Repare-se que, como refere Vale (2000), num ensino de carácter construtivista, um desenho é insuficiente, havendo, por

isso, a necessidade de recorrer a bases concretas. Neste sentido, a autora chama a atenção que o espírito investigativo do aluno não se detém se se tratar de um material estático. Logo, é necessário que o material seja móvel, para que as transformações sobre ele levem a que os alunos descubram relações e propriedades, facilitando o passo do concreto para o abstrato.

O uso de materiais no processo de ensino e aprendizagem que pressupõe a exploração, movimentação e o contacto estão, também, por si, a apelar a diferentes sentidos do aluno: o visual, o tácito e o oral, o que se torna favorável à aprendizagem (Almiro, 2004, Velosa, 2008). Por sua vez, o uso de materiais manipuláveis em atividades matemáticas, recorrendo ao trabalho de grupo, incentiva o desenvolvimento de aspetos transversais da aprendizagem, como, por exemplo, a comunicação oral e escrita. Almiro (2004) defende uma proposta pedagógica com a necessidade de “valorizar a comunicação matemática a partir de explorações de situações problemáticas, fazendo tentativas, errando e corrigindo esses erros, testando e construindo argumentos, ganhando confiança na resolução de problemas cada vez mais complexos” (p. 11). Durante a manipulação do material, o aluno é impulsionado a relatar, aos colegas ou com o professor, as transformações que está a obter e as conjeturas que elabora sobre a ação no objeto. Assim, a atividades com recurso a materiais manipuláveis está subjacente a importância da comunicação de ideias, raciocínios, ações e suas conclusões (Lorenzato, 2006; Pinheiro, 2012; Velosa, 2008). Ao comunicarem, está-se a potenciar momentos de discussão e de troca de argumentos entre os alunos, o que contribui para uma aprendizagem significativa (Pinheiro, 2012). A comunicação estabelecida é importante para a aprendizagem do aluno mas é também um importante indicador para o professor saber se os alunos estão a acompanhar as noções em estudo (Almiro, 2004; Pinheiro, 2012).

Os materiais manipuláveis podem ser um grande apoio no processo de ensino e aprendizagem, mas é, ao mesmo tempo, um desafio para o professor. Deve-se ter em atenção que “(...) trabalhar com materiais manipuláveis não prepara para trabalhar sem eles e que existe um problema na transição das ideias que surge quando se trabalha com materiais para as ideias em termos de relações e conceitos matemáticos” (Almiro, 2004, p. 8). É necessário ter uma visão crítica para que a utilização dos materiais manipuláveis proporcione um resultado eficaz no processo de ensino e aprendizagem, não sendo esta uma fórmula nem um caminho único para o sucesso. Como refere Botas (2008), “os materiais não são mágicos e não detêm o significado e discernimento por si só” (p. 35), pelo que o professor tem de ser prudente, não depositando no material uma confiança excessiva. No entanto, a mensagem transmitida pelo professor



relativamente à utilização dos materiais manipuláveis em sala de aula é muito importante, já que, se a mensagem transmitida for de que estes “podem ser um meio para uma melhor aprendizagem matemática, eles vão utilizá-los nesse sentido; se o professor tiver poucas expectativas com esta metodologia e se referir que deve ser usado apenas pelos alunos com maiores dificuldades, os alunos vão ser relutantes em utilizá-los” (Pinheiro, 2012, p. 21).

É importante que o professor esteja ciente que este tipo de atividades também pode não gerar uma aprendizagem significativa, nomeadamente quando os alunos “(...) não relacionam essas experiências concretas com a Matemática (escrita) formal. Muitos não associam espontaneamente um modelo concreto para um raciocínio matemático com o seu símbolo escrito” (Matos & Serrazina, 1996, p. 196). Assim, o uso de materiais manipuláveis

de nada valerão se, por um lado o aluno não os quiser utilizar, e, por outro, se o professor não tiver sólidos conhecimentos científicos e didáticos, conhecimentos sobre a sua utilização e potencialidades e se não permitir que o aluno tenha um papel ativo e reflexivo na construção do seu saber, proporcionando momentos de reflexão sobre as tarefas propostas. Mais ainda, o eventual uso de algum material diferente na sala de aula pode acarretar um risco de dispersão dos alunos durante a atividade (Vale, 2000, p. 71).

Segundo Lorenzato (2006), devido à motivação que o uso de materiais didáticos gera nos alunos, “(...) estes falam e movimentam-se mais do que o costume, o que para muitas pessoas pode significar bagunça” (p. 32). De facto, o uso de materiais manipuláveis em sala de aula acrescenta muita mais atividade e, consequentemente, mais barulho às aulas. Por estas razões, torna-se necessário despende de algum tempo para a exploração dos materiais com os devidos cuidados. Como refere Almiro (2004), o barulho provocado pelos alunos neste tipo de atividades “é considerado pela comunidade escolar (colegas, funcionários e alunos) como indicativo que o professor não consegue controlar os alunos” (p. 35), o que se pode tornar constrangedor para o professor. Este motivo serve também, muitas vezes, de justificação para que alguns professores não utilizem materiais nas suas aulas, principalmente em anos de exame nacional.

O material manipulável permite auxiliar a estabelecer uma relação entre as ações realizadas e a formalização matemática. Segundo Post (1988) “os manipuláveis ajudam, na medida em que estão a meio entre o mundo real das situações problemáticas concretas e o mundo abstrato das ideias e do simbolismo (oral e escrito) da matemática” (in Vale, 2002, p. 16). Assim, para se obter bons resultados, cabe ao professor o papel de mediador de toda esta atuação, pois é este quem tem de decidir como, quando e porquê determinado material deve ser

utilizado (Almiro, 2004). Para tal, além de o professor ter de saber usar e quais são as limitações do material, deve também sentir-se confiante com o material que leva para a sala de aula. Assim, o material manipulável deve ser entendido como um meio auxiliar de ensino, não sendo garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa, e não substituindo o professor (Lorenzato, 2006).

Para que se dê uma aprendizagem significativa, é necessário que se alcance uma atividade mental e não somente manipulativa por parte do aluno. Ao professor cabe acreditar no potencial do material que leva para a aula e encará-lo como um meio auxiliar do processo de ensino e aprendizagem, pois como tudo na vida, ele só produz bons resultados se for credível por quem o aplica (Lorenzato, 2006).

### **2.3. Contexto de Intervenção**

Nesta secção, apresenta-se o contexto onde se desenvolveu este estudo. A necessidade desta secção surge no sentido de que, só conhecendo os contextos é possível adaptar e adequar a estratégia de ensino, e assim “(...) contextualizar o que se ensina a um território escolar e a um grupo de alunos, administrativamente organizado em turmas, que especificam não só percursos de escolarização, bem como grupos de nível no plano de aprendizagens” (Pacheco, 2008, p. 17). Assim, o plano foi pensado de forma a estruturar ações, não se limitando apenas às intenções, mas fazendo com que se obtenha um valor acrescentado à situação presente e que se possa concretizar no futuro (Cortesão, Leite & Pacheco, 2003).

#### **2.3.1. Caracterização da escola**

O concelho de Barcelos é conhecido pelos trabalhos manuais, como os trabalhos de olaria, de figurado, como o famoso Galo de Barcelos, de cerâmica tradicional, de bordados e tecelagem, entre outros. Consequentemente, o artesanato é parte integrante da cultura deste concelho. São estas as marcas de identidade e o maior meio de sustento da população barcelense. É neste meio, e a laborar desde 1966, que está inserida a escola e os alunos alvo deste estudo.

Atualmente, além da variada oferta educativa, esta escola promove e leva a cabo bastantes atividades extracurriculares, como projetos e clubes, no âmbito das várias áreas disciplinares. No presente ano letivo, estão a ser implementados projetos como *Academia do Rio*, *Arboreto de Barcelos*, *Clube Europeu*, *Espaço +*, *Gabinete de promoção para a saúde*,

*MatXYZ e MatXYZ<sup>+</sup>*, *Museu de Ciências Naturais*, *PortABC*, *Rede pequenos cientistas*, *Revista Amanhecer* e *Speak UP*. Sobre estes projetos, é importante salientar que alguns destes já têm vindo a decorrer em anos letivos anteriores, como por exemplo o *Arboreto de Barcelos* que, desde 1985, zela pelos espaços verdes da escola transformados num jardim botânico temático. Apesar da recente intervenção nas instalações, a preocupação em manter as árvores, arbustos e plantas herbáceas é notória e louvável, pois torna toda a envolvente paisagística bastante agradável, quer pelo embelezamento, quer pela vertente educativa.

No âmbito da matemática, é importante referir o projeto *MatXYZ e MatXYZ<sup>+</sup>*, onde tive a oportunidade de participar. Este projeto é notável pelo facto de apoiar todos os alunos do 3.º ciclo do ensino básico atendendo aos diferentes níveis de desempenho na disciplina de matemática. Assim, com o projeto *MatXYZ* pretende-se:

garantir que todos os alunos do terceiro ciclo do ensino básico regular, com nível negativo a Matemática, possam usufruir de apoio pedagógico acrescido à disciplina, desde o início do ano letivo; prestar um apoio pedagógico diferenciado e mais individualizado aos alunos com nível negativo a Matemática; atender aos diferentes ritmos de aprendizagem, aos conhecimentos adquiridos nos anos de escolaridade anteriores, ao grau de desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas, comunicação matemática e raciocínio matemático, à atitude face à Matemática e à postura em sala de aula (Correia, 2011).

Ainda neste projeto, o *MatXYZ<sup>+</sup>* pretende prestar apoio aos alunos com nível positivo, para que estes também tenham a oportunidade de progredir nas suas aprendizagens.

Devido ao elevado número de níveis negativos obtidos no final do 2.º período no 9.º ano de escolaridade, ainda foi aprovado o projeto *Nível 3*, no 3.º período, que consiste na resolução de fichas por partes, como forma de incentivo ao estudo. Este projeto desenvolve-se ao nível da escola para todos os alunos do 9.º ano de escolaridade com, pelo menos, um nível negativo nos primeiro e segundo períodos. Com esta estratégia os alunos tiveram, todas as terças feiras, uma ficha com questões sobre a matéria lecionada. Neste sentido, para que os alunos possam preparar-se, foram previamente avisados dos conteúdos que saíam em cada uma das fichas. No final, a classificação obtida nas fichas por partes terá o peso de 50 % na média final do período. Sendo este o ano de escolaridade onde se desenvolveu este estudo, também eu e a minha colega de estágio tivemos a oportunidade de participar neste projeto.

Tivemos ainda a oportunidade de participar em atividades como o *Magusto (Inter)ativo* dinamizado pelos núcleos de estágio de Matemática, Espanhol e Educação Física. Esta atividade

foi dirigida a todos os alunos do 3.º ciclo e consistiu num peddy-paper com atividades de cada uma das áreas dos núcleos de estágio. Também tivemos a oportunidade de participar no dia da Escola Aberta onde pudemos desenvolver algumas atividades, no âmbito da matemática, dirigidas a toda a comunidade escolar. Durante esta atividade foi possível reparar que a escola possui um depósito de recursos educativos, plausíveis de serem utilizados nas atividades em sala de aula. A realização destes projetos e eventos possibilitou uma maior envolvimento com os alunos e com o pessoal docente e não docente, pelo que estas são sempre muito enriquecedoras.

### **2.3.2. Caracterização da turma**

A turma alvo deste estudo, no presente ano letivo 2012/2013, encontra-se no 9.º ano de escolaridade. Esta turma é constituída por 11 raparigas e 7 rapazes, com uma média de idades de 14,6 anos. A maioria dos alunos já pertencia a esta turma desde o 7.º ano à exceção de um aluno que integrou a turma este ano. A média escolar da turma no 8.º ano foi de 3,17 (numa escala de 1 a 5).

A turma tem dois alunos com Necessidades Educativas Especiais (NEE), sendo que um deles só em meados do segundo período é que passou a ser integrado neste plano. Neste sentido, os alunos com NEE apresentam dificuldades de aprendizagem, isto é, apresentam uma discrepância significativa entre o seu rendimento escolar e aquilo que deveriam de realizar em função da sua idade (Lopes, 2005).

Pela caracterização socioeconómica da turma, 8 alunos referem já terem reprovado pelo menos uma vez e 11 alunos referem que não estudam diariamente. A matemática é uma das disciplinas referidas pela maioria dos alunos como a disciplina onde revelam maiores dificuldades. É de salientar ainda que 7 alunos aspiram ingressar no Ensino Superior, 9 alunos referem querer concluir o 12.º ano e 1 aluno pretende concluir apenas o 9.º ano.

Ao longo do ano foi possível constatar que estes alunos, na sua maioria, apresentam um ritmo de trabalho muito lento e têm muitas dificuldades na compreensão e resolução das atividades matemáticas propostas. Mais ainda, foi considerada pelos professores como sendo uma turma de alunos desinteressados e pouco estudiosos.

Como metodologia de trabalho, nas aulas de matemática, os 18 alunos da turma, os quais atribuiu-se neste estudo nomes fictícios, trabalham em grupos. Assim, os alunos, durante

o primeiro e segundo período, e em particular durante a intervenção para este estudo, estiveram agrupados em cinco grupos de 3 ou 4 elementos cada grupo como se apresenta na tabela 1.

Tabela 1

*Constituição dos grupos de trabalho*

Grupo	$G_I$	$G_{II}$	$G_{III}$	$G_{IV}$	$G_V$
<b>Elementos do Grupo</b>	Adriana, Helder, Elsa, Paulo	André, Aires, Carla, Eva	Dinis, Eduarda, Marta, Sónia	Anita, Célia, José	Jade, Luís, Vera

Os grupos foram constituídos no primeiro dia de aulas, segundo as preferências dos alunos, tendo como única exigência do professor titular da turma, que cada grupo tivesse alunos com mais do que um nível de desempenho. No terceiro período os alunos foram reagrupados pelo professor titular, uma vez que ao longo dos dois períodos verificou-se que os grupos não estavam a funcionar no desempenho desejado. Apesar de os alunos não apresentarem total autonomia nesta metodologia de trabalho, acredita-se que “(...) pode ajudar a promover mais reflexão, mais discussão entre os alunos e mais atividades de resolução de problemas, (...) favorece a aprendizagem cooperativa, ao proporcionar inúmeras oportunidades para a formulação e discussão de conjecturas, argumentos e estratégias de resolução de problemas (...)” (Matos & Serrazina, 1996, p. 149).

O desempenho da turma no final do ano letivo sofreu uma ligeira melhoria em relação ao 1.º período, no entanto, manteve-se negativo nos três períodos, como é possível observar na tabela 2.

Tabela 2

*Desempenho dos alunos ao longo do ano letivo*

1.º Período		2.º Período		3.º Período	
Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
2,56	0,76	2,44	0,83	2,78	0,85

Devido ao elevado número de negativas registadas na turma, no 2.º período, 72 % dos alunos integraram o projeto Nível 3. Este projeto permitiu obter, num curto espaço de tempo, uma melhoria significativa do desempenho em alguns alunos da turma.

## 2.4. Plano Geral de Intervenção

Nesta secção do relatório apresentam-se as metodologias de ensino e aprendizagem usadas na intervenção de ensino e justifica-se a sua importância segundo o contexto de intervenção e da literatura. Além disso, também se apresentam as estratégias de investigação e avaliação da ação, identificando a pertinência de cada estratégia para poder responder às questões do projeto.

### 2.4.1. Metodologias de ensino e aprendizagem

Ao longo da intervenção de ensino foram usadas, essencialmente, duas metodologias de ensino e aprendizagem: diversidade do tipo de tarefas e o trabalho de grupo.

**Atividades.** Para atingir os objetivos, nas minhas aulas, procuro propor atividades que estimulem a capacidade matemática, isto é, atividades “(...) que não separam o pensamento matemático dos conceitos matemáticos ou aptidões, que despertam a curiosidade dos alunos e que os convidam a especular e a prosseguir com as suas intuições” (NCTM, 1998, p. 27).

Neste sentido, é importante diversificar as atividades em sala de aula, ressaltando o papel ativo do aluno, pois “não é possível continuar a conceber o currículo de uma forma estática, definida nos seus conteúdos, organização e modelos de trabalho, a partir de um único padrão, centralmente definido” (Roldão, 1999, p. 21). Deve-se dar a oportunidade de os alunos poderem “(...) proceder a explorações de forma progressivamente mais autónoma, o que lhes permitirá adquirir uma compreensão mais aprofundada sobre importantes noções geométricas (...)” (NCTM, 2008, p. 365).

No entanto, este tipo de trabalho também requer mais esforço por parte do professor. É o professor quem tem de selecionar as tarefas de modo a incentivar o interesse dos alunos e de forma a incentivar a colaboração de todos os elementos do grupo (Amstrong, 2008). Assim, usarei tarefas de tipo exploratório, umas de carácter matemático e outras da vida real, de forma a desenvolver o espírito crítico e o raciocínio dos alunos. Procederei, por isso, a momentos principalmente centrados na atividade de grupo, mas também a momentos de atividade individual e de discussão na turma.

**Trabalho de Grupo.** Durante a minha intervenção, optei sempre por dispor os alunos nos grupos de trabalho que têm vindo a funcionar nas aulas do professor orientador. Esta opção deve-se ao facto de verificar que,

ajudar os colegas pode ser útil aos melhores alunos, ao permitir-lhes observar processos conhecidos e refletir sobre eles a um nível superior. Para isso, é preciso que a ajuda não se limite a dar informações, mas envolva explicação. A ajuda pode também beneficiar os alunos com dificuldades desde que estes reconheçam a necessidade e tenham oportunidade de usar, de facto, as explicações recebidas (Matos & Serrazina, 1996, p. 149).

Assim, o potencial deste método de trabalho em sala de aula está no facto de favorecer tanto os alunos com mais dificuldades como os melhores alunos e torna-los mais autónomos e competentes. Como referem alguns professores entrevistados num estudo realizado por Cow e Cow (2008), no trabalho de grupo, a ideia de um aluno pode despoletar outra ideia ou pensamento noutro aluno, apoiando a autonomia dos alunos nas tarefas. Esta estratégia deve ser introduzida gradualmente em sala de aula já que, quando a discussão se alarga a toda a turma, “os alunos acabam por calcular mais o que dizem ou mesmo calar-se se não tiverem a certeza da pertinência do seu comentário ou temerem a reação do professor” (Martinho & Ponte, 2005, p. 275). Por isso, a sala de aula deve ser um espaço de negociação de significados entre os alunos e entre alunos e professor.

De facto,

(...) a oportunidade de conversar sobre as suas experiências e sobre como estas se relacionam com os conceitos matemáticos, de se escutar mutuamente enquanto partilham ideias, de ler matemática apresentada em diversos formatos (...) e de escrever sobre situações matemáticas permite que os alunos comparem experiências, clarifiquem o seu raciocínio e desenvolvam a perceção de que a matemática que estudam na escola está interligada com a matemática que encontram no mundo real (NCTM, 2001, p. vii).

Só assim é que o aluno, graças à ajuda recebida pelo professor, pode revelar-se progressivamente competente e autónomo na resolução de tarefas, no emprego de conceitos, na prática de determinadas atitudes e em muitas outras questões (Martinho, 2011; ME, 2007; NCTM, 2001). Como refere Pacheco, “(...) o professor é o ator a quem tudo se pede, a quem tudo se critica, pois é por ele que é avaliada pública e opinativamente a escola” (2008, p. 30). Por isso, o professor é quem tem de seleccionar as tarefas de modo a incentivar o interesse dos alunos e de forma a incentivar a colaboração de todos os elementos do grupo (Amstrong, 2008). No entanto, devem ser os alunos a assumir o papel principal na sala de aula, isto é, os alunos devem desenvolver uma atitude ativa e investigativa, enquanto que o professor deve assumir um papel de orientador e mediador.

O trabalho de grupo não deve ser encarado pelo professor como uma forma de distribuir os alunos na sala, onde o trabalho individualizado continua a prevalecer. Para que os grupos de trabalho possam funcionar, os alunos devem ser capazes de dar as suas opiniões e ouvir atentamente as dos colegas, discutindo de forma construtiva, em que a existência de respeito mútuo entre os elementos do grupo permita que estes trabalhem como um todo (Martinho, 2011).

**Discussões grupo-turma:** Quando um aluno apresenta uma ideia ou resultado pertinente de um determinado assunto matemático na sala de aula, cabe ao professor aproveitar essa ideia, independentemente de esta estar certa ou errada, e discuti-la com o grupo ou com a turma. Assim, considero que as discussões grupo-turma dão a oportunidade de cada grupo partilhar as suas conclusões com toda a turma, o que torna as aulas mais interessantes e dinâmicas. Ao agir desta forma, o professor valoriza e estimula a participação dos alunos e incentiva a comunicação matemática. Ao longo da minha intervenção, também tentei fazer uso desta estratégia. Para se atingir este objetivo, as minhas aulas tentam seguir o modelo de Smith et al. (2009) que se orienta segundo cinco práticas, a saber, (1) antecipar as respostas dos alunos em tarefas matemáticas desafiadoras; (2) monitorizar o trabalho dos alunos e o envolvimento destes nas tarefas propostas; (3) selecionar os alunos para apresentarem o seu trabalho matemático; (4) sequenciar as resoluções dos alunos que serão apresentadas; (5) estabelecer conexões entre as respostas dos alunos e ideias matemáticas essenciais.

Constatou-se que esta prática não é fácil de implementar, principalmente nos momentos das aulas dedicados à síntese das conclusões da atividade, mas é importante pois permite colmatar eventuais dúvidas que tivessem ficado da realização da tarefa.

Neste sentido, Rodrigues e Gazire (2012), também referem que quando se propõe material manipulável o professor deve “(...) atuar como um mediador na construção do conhecimento matemático, orientando o aluno a realizar uma ação reflexiva sobre o seu objeto de estudo durante a atividade experimental” (p. 195). Assim, quando o professor utiliza materiais manipuláveis na sua aula deve estimular os alunos a expressar as suas ideias, a partilhá-las com os seus colegas e com o professor de forma a esclarecer dúvidas existentes. Desta forma, as aulas tornam-se mais dinâmicas e ativas para os alunos, contribuindo para uma melhoria do processo de aprendizagem.



Concluindo, por um lado, este modelo acarreta ainda mais imprevisibilidade ao decorrer da aula, mas, por outro, torna as aulas mais dinâmicas e interessantes, quer para o professor, quer para o aluno.

#### 2.4.2. Estratégias de intervenção e avaliação da ação

Neste estudo, utilizaram-se diversas estratégias para avaliar a ação, de forma a recolher a informação necessária e suficiente para responder às questões propostas. Neste sentido, o Quadro 1 pretende mostrar, de uma forma sucinta, que procedimentos de recolha de dados foram utilizados, bem como a questão a que se pretende dar resposta com esse procedimento.

Quadro 1

*Tipo de procedimento que pretende dar resposta às questões formuladas*

	Observação	Gravação das aulas	Produções dos alunos	Notas de campo	Questionário
Q1	✓	✓	✓	✓	
Q2	✓	✓	✓	✓	✓
Q3		✓	✓	✓	✓

Para tal, na recolha de dados recorreu-se à observação e análise de aulas gravadas e transcritas e à análise de documentos produzidos pelos alunos, como se expõe de seguida.

**Gravação das aulas.** Com a devida autorização da escola (anexo I) e dos encarregados de educação (anexo II), que, desde logo, mostraram abertura para a situação, foi-me possível proceder à gravação audiovisual das interações entre os alunos. Segundo o NCTM (2008) as gravações de aulas traduz-se numa técnica de avaliação que deve ser utilizada pelos professores uma vez que as conversas que ocorrem durante a aula poderão orientar possíveis mudanças e, além disso, permitem ao professor refletir sobre as decisões que foram tomadas no decorrer da aula. Assim, decidi gravar os grupos de trabalho  $G_I$ ,  $G_{II}$  e  $G_{III}$ , bem como o grupo-turma com câmaras de vídeo. Nos restantes dois grupos,  $G_{IV}$  e  $G_V$ , fiz apenas gravações áudio. Esta escolha deveu-se a um fator externo, a saber, a quantidade de câmaras de que dispunha, que me impossibilitava a gravação de todos os grupos, e que, deste modo, me condicionou e levou a optar por gravar os grupos com mais elementos por conterem alunos com vários níveis de desempenho e me poder dar uma visão mais ampla e mais completa dos factos.

Ao longo da intervenção foi necessário repensar o posicionamento das câmaras na sala de aula, uma vez que, com a posterior visualização das gravações sentia dificuldade em ver o

que os alunos estavam a discutir. Durante as aulas, eu e a minha colega de estágio, que também fez uso deste instrumento de recolha de informação, decidimos que cada uma tomaria conta das câmaras na aula da outra. Esta foi uma estratégia que se traduziu numa grande ajuda, pois era muito difícil dirigir simultaneamente a aula e as câmaras.

A gravação das aulas em formato audiovisual foi um importante instrumento de recolha de informação. Com este tipo de gravação é possível ver como se fosse em tempo real as formas de utilização e as dificuldades dos alunos na manipulação dos materiais. Mais ainda, é possível aferir as percepções dos alunos sobre a aprendizagem e a utilização dos materiais manipuláveis na sala de aula.

**Recolha das produções dos alunos.** Ao longo das aulas com ênfase no projeto, tive a oportunidade de recolher as produções dos alunos das atividades que realizaram na aula.

Uma das estratégias que utilizei para registar os erros dos alunos na resolução de tarefas com construções recorrendo aos materiais, foi pedir aos alunos que não apagassem caso se enganassem na resolução das mesmas. Assim, as tarefas apresentavam espaços para os alunos resolverem de novo a questão caso se enganassem, e posteriormente seria mais um meio de recolha de erros. No entanto, dado que esta era uma situação que contrariava os hábitos adquiridos, os alunos esqueciam-se e apagavam o que considerassem errado. Da minha parte, ia alertando os alunos mas também me esquecia algumas vezes, pelo que esta estratégia não funcionou muito bem. Considero que esta é uma estratégia muito importante, que não funcionou muito bem, devido à minha falta de persistência. Assim, caso voltasse a esta situação, era importante ser mais persistente.

Com este instrumento de recolha de dados foi-me possível averiguar as dificuldades e a forma como os alunos utilizam os materiais manipuláveis. Mais ainda, posso assim analisar se, nas questões, os alunos utilizam os materiais de forma consciente e sem dificuldades.

**Questionário.** O questionário (anexo III) que utilizei teve como único público-alvo os alunos da turma de intervenção, com o objetivo de averiguar quais as dificuldades e potencialidades que os alunos atribuem à introdução dos materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem.

Neste questionário foram utilizadas questões fechadas de resposta psicométrica, recorrendo a uma escala de Likert com quatro níveis, e questões de resposta aberta. De facto, “este tipo de questionário é útil quando se pretende obter informação qualitativa para

complementar e contextualizar a informação quantitativa obtida pelas outras variáveis” (Hill & Hill, 2002, p. 95). A escolha de uma escala de Likert com quatro níveis deve-se à tendência em escolher a opção do meio. Assim, sem a hipótese de uma opção intermédia, penso que os alunos têm de pensar um pouco mais para tomar a decisão e, por isso, tomarão uma decisão mais conscienciosa. A opção de em cada questão colocar as siglas *DT*, *DP*, *CP* e *CT* deve-se ao facto de, pessoalmente, em questionários relativamente longos, me perder no significado das siglas que está em cada coluna. Pessoalmente não considero este questionário longo e com apenas quatro possibilidades de resposta penso que não haverá tanta hipótese de dispersarem. No entanto, considereei pertinente tendo em conta o público-alvo, que como já referi são alunos com algumas dificuldades cognitivas, e, portanto, poderiam sentir essas dificuldades. De facto, “quando estamos a escrever as perguntas de um questionário devemos pensar cuidadosamente em quem vai responder ao questionário pois as perguntas devem ser escritas de uma maneira adequada às suas (prováveis) habilitações literárias e ao vocabulário dos respondentes” (Hill & Hill, 2002, p. 96).

As questões fechadas de respostas psicométricas estão focalizadas para saber a opinião dos alunos acerca de situações e/ou emoções que a teoria refere sobre a utilização dos materiais manipuláveis. As questões de resposta aberta pretendem, de uma forma orientada, dar espaço para os alunos expressarem as suas opiniões sobre situações e/ou emoções que sentiram aquando da utilização dos materiais.

Dado o público alvo em questão, preocupei-me em escrever perguntas curtas, usar palavras simples e uma sintaxe acessível (Hill & Hill, 2002, p.96). Mais ainda, apliquei este questionário após ter terminado a minha intervenção para que os alunos tivessem presentes as atividades que desenvolveram e a forma como as encaram.

**Aferir aprendizagens.** A matéria lecionada considerada para este projeto foi dividida nas duas fichas de avaliação do 2.º Período (anexo V). Uma vez que cada uma das estagiárias estava responsável pela correção das fichas de avaliação da sua turma, foi-nos possível digitalizar as questões resolvidas pelos alunos sobre a matéria importante para o projeto. Desta forma, ao analisar as fichas de avaliação, é possível perceber melhor as perceções dos alunos sobre a influência dos materiais manipuláveis e a sua aprendizagem em Geometria.



## Capítulo III

### INTERVENÇÃO

Neste capítulo, dividido em cinco secções, são apresentados os resultados obtidos que serviram para dar resposta aos objetivos de estudo. Inicialmente é feita a descrição dos episódios mais relevantes das aulas com ênfase no projeto, tendo em conta o tipo de material manipulável utilizado. Segue-se a apresentação dos resultados obtidos no questionário relativamente à perceção dos alunos sobre o uso de materiais manipuláveis em sala de aula.

Para se compreender melhor a intervenção de ensino, na tabela 3, apresenta-se o resumo da intervenção contemplando as tarefas e os objetivos das respetivas aulas com ênfase no projeto.

Tabela 3

*Organização da intervenção de ensino centrada no projeto*

Aula	Tarefas	Objetivos da aula
<b>1</b> (90 minutos)	<b>1.</b> A mediatriz com o Mira. <b>2.</b> Comboio de Barcelos.	<ul style="list-style-type: none"><li>• Identificar lugares geométricos no plano: mediatriz de um segmento de reta, circunferência e círculo;</li><li>• Introduzir a construção de circunferência, círculo e mediatriz de um segmento de reta.</li></ul>
<b>2</b> (90 minutos)	<b>3.</b> A Bissetriz. <b>4.</b> Ângulos congruentes	<ul style="list-style-type: none"><li>• Introduzir o conceito e a construção da bissetriz de um ângulo;</li><li>• Identificar lugares geométricos no plano: Semiplano aberto, semiplano fechado e bissetriz de um ângulo.</li></ul>
<b>3</b> (90 minutos)	<b>5.</b> O jogo Angry Birds. <b>6.</b> Triângulo SOL.	<ul style="list-style-type: none"><li>• Construir uma circunferência circunscrita a um triângulo;</li><li>• Construir a circunferência inscrita num triângulo.</li><li>• Identificar o circuncentro e o incentro de um triângulo.</li></ul>
<b>4</b> (90 minutos)	<b>7.</b> Ângulos internos e externos de um polígono convexo.	<ul style="list-style-type: none"><li>• Determinar o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono convexo;</li><li>• Determinar o valor da soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo.</li></ul>
<b>5</b> (90 minutos)	<b>8.</b> Inscrevendo Polígonos.	<ul style="list-style-type: none"><li>• Inscrever um polígono regular numa circunferência.</li><li>• Determinar a amplitude de ângulos, internos e externos, de um polígono inscrito numa circunferência.</li></ul>
<b>6</b> (90 minutos)	<b>9.</b> Área de polígonos regulares.	<ul style="list-style-type: none"><li>• Determinar a área de polígonos regulares inscritos numa circunferência.</li><li>• Determinar o volume de prismas.</li><li>• Resolver problemas envolvendo polígonos.</li></ul>

Estas tarefas foram pensadas e elaboradas para serem implementadas no âmbito do projeto por mostrarem potencial de resposta às questões que me proponho responder neste relatório. No entanto, as tarefas 2, 8 e 9 não serão aqui analisadas. Esta escolha deve-se à impossibilidade de analisar todas as tarefas, pois tornaria este relatório demasiado extenso, pelo que tive de escolher aquelas que me pareciam fornecer mais dados para análise. De seguida, a tabela 4 apresenta os diferentes materiais curriculares que foram utilizados pelos alunos nos diferentes momentos desta intervenção de ensino e que serão aqui analisados.

Tabela 4

*Tipos de materiais e o seu contexto*

Momentos	Tarefas	Materiais Curriculares				
		Materiais de Escrita	Materiais Manipuláveis	Material tecnológico	Outros Materiais	
Aulas	1	1	Ficha	Mira	—	Lápis Borracha
		2	Ficha	Régua Compasso Esquadro	—	Lápis Borracha
	2	3	Ficha	Régua Transferidor Mira	—	Lápis Borracha
		4	Ficha de trabalho	Régua Transferidor	—	Lápis Borracha
	3	5	Ficha Manual escolar	Régua Compasso	—	Lápis Borracha
		6	Ficha de Trabalho	Régua Compasso Transferidor	—	Lápis Borracha
	4	7	Ficha	Papel cartolina	Calculadora	Lápis Borracha Tesoura
	5	8	Ficha	Régua Compasso	—	Lápis Borracha
	6	9	Ficha	Régua Compasso	—	Lápis Borracha
	Testes	1	2*	Ficha de avaliação	—	—
7*			Ficha de avaliação	Régua Compasso	—	Lápis Borracha
2		4*	Ficha de avaliação	—	Calculadora	Caneta
		6*	Ficha de avaliação	Régua Compasso	—	Lápis Borracha

\*Nota: A numeração da tarefa corresponde à numeração nas respetivas fichas de avaliação.

### 3.1. Mira

Como se pode observar pela tabela 4, o Mira foi utilizado pelos alunos em duas tarefas correspondentes a duas aulas distintas. Nestas aulas, foi facultado um Mira para cada um dos alunos.

Mais ainda, refere-se que “o Mira constitui uma ferramenta excelente para construções geométricas básicas e outras envolvendo a simetria” (NCTM, 2001, p. 70). Assim, uma vez que uma das características da mediatriz de um segmento de reta é ser um eixo de simetria desse segmento de reta, como refere o NCTM (2001), a utilização do MIRA é muito útil neste tipo de atividades que envolvem reflexões.

De seguida irei apresentar alguns dos episódios mais relevantes das duas aulas onde se evidencie o trabalho realizado pelos alunos com este material manipulável.

#### 3.1.1. Tarefa sobre a mediatriz

Na primeira aula, de introdução ao conceito de mediatriz de um segmento de reta, antes dos alunos começarem a atividade, procedeu-se a uma breve explicação sobre as características e o modo de funcionamento do Mira. Decidi dar apenas uma explicação para a introdução deste material na atividade, uma vez que apenas dois alunos referiram que nunca tinham trabalhado com este material.

Irei então analisar a tarefa *A mediatriz com o Mira*, apresentada a seguir, onde se pretendia que os alunos chegassem às características da mediatriz de um segmento de reta.

---

1. Nesta tarefa irás trabalhar com um objeto chamado MIRA.



1.1. Marca um ponto C que esteja à mesma distância de A e de B.

1.2. Agora marca mais dois pontos equidistantes de A e de B.

1.3. Serão esses os únicos pontos equidistantes de A e de B? Justifica a tua resposta.

---

Por observação do enunciado da tarefa verifica-se que já era dado o segmento de reta  $[AB]$  para facilitar a resolução da tarefa e a visualização. Esta opção foi pensada já que os alunos referiram que, apesar de já terem utilizado o Mira, já não se lembravam do que fizeram.

Assim, a única reflexão que transforma o ponto  $A$  no ponto  $B$  (ou vice versa) trata-se da reflexão que tem por eixo de simetria a mediatriz do segmento de reta  $[AB]$ . Basta reparar que o segmento de reta  $[AB]$  é perpendicular ao eixo de reflexão e que o seu ponto médio está sobre o eixo de reflexão (Veloso, 2000).

No início da atividade os alunos reclamam que não veem nada, que não sabem fazer e mostram grandes dificuldades em perceber o que o Mira faz, ou seja, em perceber o conceito de simetria de reflexão (ou simetria axial) e de eixo de reflexão (ou eixo de simetria).

A título de exemplo, veja-se o raciocínio que o aluno Dinis do grupo  $G_{III}$  começa por fazer, também esquematizado na figura 2.

*Eduarda:* Professora, o  $C$  nós temos de marcar, por exemplo, aqui no meio da linha, ou aqui, ou aqui (apontar para vários pontos da parte da folha em branco) supostamente?

*Professora:* Porquê?

*Eduarda:* Mas tem de estar à mesma distância?

*Professora:* O que pede o enunciado?

*Eduarda:* Pronto é isso.

A aluna Eduarda retira a régua do porta lápis e começa a fazer medições para encontrar o ponto  $C$ .

*Dinis:* Olha encontrei, está ali. Se andares isto reflete.

*Eduarda:* A sério Dinis.

Aluna Eduarda lê a segunda alínea da tarefa:

*Eduarda:* Agora marca mais dois pontos equidistantes de  $A$  e  $B$ . Ok, vou fazer um triângulo, não me apetece.

*Dinis:* Então não está? Este ponto (o ponto que resulta da reflexão do ponto  $A$ ) está à mesma distância.

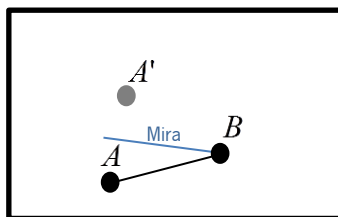


Figura 2. Esquema da situação referida pelo aluno Dinis.



O aluno Dinis levanta uma questão interessante pois, de facto, devido à função do Mira, o ponto que ele vê, o ponto  $A'$  do esquema da figura 1, está à mesma distância do Mira que o ponto  $A$ , já que está a fazer uma simetria de reflexão deste ponto. No entanto não satisfazia o que estava a ser pedido, pois era suposto que encontrasse um ponto que esteja à mesma distância do ponto  $A$  e do ponto  $B$ . No entanto, como a aluna Eduarda ainda não tinha pegado no Mira e estava a resolver com a régua, não deu importância à questão do colega, assim como o resto do grupo. Esta aluna mostra resistência a utilizar o Mira, como se pode ver no diálogo seguinte.

*Marta:* E quê? Tu tiveste tanto trabalho e era só pôr aqui a cena.

*Eduarda:* Não, não é.

*Marta:* Era sim. Até o ponto bater um no outro.

*Eduarda:* E eu tive muito trabalho... E tu tás aí assim. (Aluna queixa-se do facto da colega estar a ter trabalho ao tentar acertar o Mira de modo a fazer coincidir o ponto que resulta da reflexão de  $A$ , no ponto  $B$ .)

No entanto, esta é uma situação que se verificou em todos os grupos, pois todos os alunos mostraram resistência ao uso do Mira e muitos foram tentando com a régua. Veja-se, no diálogo seguinte, como o grupo  $G_{II}$  desenvolve o seu raciocínio para resolver esta tarefa.

*André:* Temos de descobrir um ponto  $C$  que esteja à mesma distância de  $A$  e de  $B$ , ou seja, o centro.

*Eva:* Sim.

*André:* Como é que vais fazer isso?

*Eva:* Pegas numa régua e vês.

(...)

*André:* Não simplesmente fazes... fazes com que coincidam aqui, aquelas duas bolinhas. E aí vais encontrar, percebeste? Tipo assim...

*Eva:* Assim, olha assim, as bolinhas têm de coincidir no mesmo sítio.

*André:* Assim, assim, tá certo.

(...)

*André:* Agora marca dois pontos que estejam à mesma distância de  $A$ , ou seja pode ser aqui?

*Professora:* Então se for aqui este ponto está à mesma distância de  $A$  e de  $B$ ?

*André:* Não. Mas este ponto está à mesma distância – Apontar para o ponto que está sobre o segmento de reta  $[AB]$ , o ponto médio.

*Professora:* Este está e agora pede outro.

*André:* A professora pensa que nós fazemos milagres.

O grupo testa várias possibilidades para encontrar os dois pontos pedidos. Entretanto a

aluna Eva marca sobre o segmento de reta o ponto que falavam, mas ao marcá-lo não desenha um ponto, mas sim um traço.

*Eva:* André? É fácil. André?

*André:* Diz, estou a ouvir.

*Eva:* É fácil, se traçares a vertical, não é...

*André:* Mas mesmo assim não estão à mesma distância.

*Eva:* Então não fica? (Aluna debruça-se para chegar à folha do colega e diz:) Daqui para aqui não tem a mesma distância? Tem.

*André:* Mas está no mesmo ponto.

*Eva:* E depois. Se tu marcares aqui [um ponto] ele vai estar à mesma distância daqui e daqui.

Enquanto a professora discutia a tarefa com toda a turma e os alunos apercebem-se que o que a aluna estava a dizer estava certo, o aluno André diz:

*André:* Sim Eva nós louvámos-te.

Neste diálogo é possível reparar que não foi dado ao grupo tempo suficiente para discutirem a ideia da aluna Eva. Uma vez que tinha destinado pouco tempo para esta tarefa, apressei-me na discussão dos resultados com toda a turma. Assim, não dei o devido tempo para que todos os alunos discutissem as questões e assimilassem o que estavam a fazer nesta tarefa. Na sequência da observação do desenvolvimento desta aula, na tabela 5 apresento as vantagens e desvantagens registadas.

Tabela 5

*Registo das vantagens e desvantagens observadas nas atividades com recurso ao Mira.*

Vantagens	Desvantagens
Integração da visualização matemática.	Meio de distração devido às brincadeiras dos alunos.
Incentivo à experimentação.	Meio de ruído e movimento dos alunos.
Facilitador na passagem para o abstrato.	Margem de erro na construção da mediatriz do segmento de reta.
Despoletar de discussão entre os alunos.	Mais tempo despendido para obter as relações.
Aprender a utilizar os materiais na descoberta matemática.	Elevada percentagem de alunos que não conseguiu obter as relações.

Nesta aula, pode-se verificar algumas vantagens da utilização do Mira, como a oportunidade de os alunos manipularem um material que não costumam ter acesso e poderem idealizar e testar as suas ideias. Assim desencadearam-se algumas discussões entre os alunos, muitas delas despoletadas pelo resmungar destes com citações do tipo “Não vejo nada com

isto” que, posteriormente, se revelaram discussões com mais fruto. No entanto, as desvantagens registadas são significativas e todas elas surgem como consequência da introdução do material manipulável. As dificuldades sentidas nesta atividade, que levaram a esta não ser tão bem sucedida como tinha sido idealizada pela professora, parece estar no facto de os alunos não trazerem com eles os conhecimentos que se esperava e os alunos terem dificuldade em relacionar as suas interações com os materiais e com as estruturas existentes (Hiebert & Carpenter, 1992).

### 3.1.2. Tarefa sobre a bissetriz

Na tarefa *A bissetriz*, que se apresenta de seguida, pretendia-se que os alunos, com a utilização de material manipulável, nomeadamente do Mira, elaborassem conjecturas sobre as características da bissetriz de um ângulo qualquer. Desta vez, não foi dispensado tempo no início da realização da tarefa para explicar aos alunos as características do material, nem foi dito expressamente aos alunos que tinham de resolver a atividade com este material. No início da aula, a professora pousou em cada uma das mesas os Miras e deixou que os alunos elaborassem as suas estratégias e optassem pelo material que achassem mais adequado. Assim, pretendia-se ir ao encontro das recomendações do NCTM (1998), ao referir que o ideal mesmo seria que os alunos tivessem sempre à sua disposição vários materiais para selecionarem os que mais lhes convinham para trabalhar ou discutir uma dada tarefa matemática. Talvez motivados pela facilidade de acesso a um material que não costumam ter acessibilidade, alguns alunos foram aderindo à utilização do Mira. Assim, durante a realização da tarefa, a professora acabou por ter a necessidade de relembrar algumas regras de funcionamento do Mira, pois alguns alunos estavam esquecidos e estavam a cometer erros.

---

1. Desenha um ângulo ABC qualquer, com uma amplitude à tua escolha.

1.1. Marca um ponto D que esteja à mesma distância das semirretas  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ .

1.2. Agora marca mais dois pontos equidistantes das semirretas  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ .

1.3. Serão esses os únicos pontos?

---

Pela observação da tarefa, é possível reparar que para a realização desta é necessário construir o ângulo no qual se pretende construir a bissetriz. No entanto, como a medida da amplitude do ângulo é qualquer, os alunos poderiam socorrer-se de uma régua, um transferidor, um material do dia-a-dia, como o cartão escolar, ou até mesmo do Mira, para o construir. Assim sendo, os alunos poderiam utilizar o material manipulável que pretendessem para elaborar as conjecturas subjacentes a esta tarefa. No entanto, dois dos grupos optaram por usar o transferidor, o que pode ser explicado pela cultura de ensino, em que a um ângulo está sempre subjacente o transferidor, quer para a medição da amplitude, quer para a construção.

Note-se que a construção do ângulo ainda gerou alguma dificuldade nos alunos. A título de exemplo veja-se a discussão ocorrida no grupo  $G_{IV}$ .

*Anita:* Stora pode chegar aqui? Pode ser assim? Tipo aqui tem um ângulo.

*Professora:* Já discutiste com os teus colegas se pode ser assim ou não?

*Anita:* Mas pode ser tipo...

(...)

*Anita:* Sim, lá está, pode ser 90 graus.

*Professora:* Marquem a amplitude, se faz favor. Pode ser assim, pode. Tens é que identificar o ângulo com as letras.

*Anita:* Como?

*Professora:* Imagina, que eu posso considerar este...

*Anita:* Ah, tipo A, B, C, ou não?

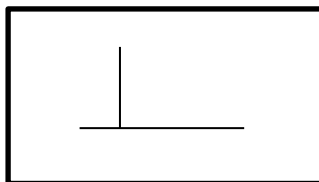
*Professora:* Ora pensa, se for esse é um ângulo de? Não é um ângulo, está dividido em dois.

*Célia:* Mas tipo, só um? Não é para desenhar a mediatriz nem nada?

*Professora:* Não. Só pede para desenhar um ângulo.

*Anita:* A sério. Então como é que se põe as letras nisto?

*Professora:* Eu vou explicar que isto é importante para toda a turma.



*Figura 3.* Esquema da situação referida pela aluna Anita.

Pela análise do diálogo, é possível reparar que a aluna Anita parece não estar consciente relativamente ao conceito de ângulo e não sabe identificá-lo. No entanto, a dúvida relativamente à identificação de um ângulo era uma dúvida que tinha sido referida por muitos alunos e, por isso, a professora decidiu discutir no quadro com toda a turma.

Embora os alunos continuem a mostrar resistência ao uso do Mira, nesta aula já se observaram discussões mais acesas entre eles. Veja-se, por exemplo, o grupo  $G_{IV}$  que começa por chamar a professora mas acabam por ter uma discussão interessante.

*Célia:* É um ponto não é uma linha.

*José:* Calma. Mas eu fiz uma linha...

*Célia:* Já não estou a perceber nada.

*Anita:* Sim, exatamente como ele fez. Uma linha tem vários pontos.

*Professora:* Tem vários pontos. Será que os pontos...

*Anita:* Sim, sim, porque o ângulo ao vir assim vai estar à mesma distância.

*Célia:* Como?

*Anita:* Sim, ó Célia...

*Célia:* Ah. Mas assim não vou saber se *tá coisa*, se tem uma amplitude maior de um lado que do outro.

*Anita:* Então a professora disse que faz simetrias, então estes são iguais.

*Célia:* Ah... Tem lógica.

Neste diálogo, nota-se que estas alunas relacionam a ideia de distâncias iguais com o facto de o ângulo estar dividido em duas partes congruentes. O facto de estes alunos utilizarem o Mira para construir a bissetriz do ângulo que desenharam permitiu-lhes concluir que o ângulo está dividido em duas partes iguais, devido ao facto de este material manipulável servir para fazer simetrias.

No entanto, como mostra a tabela 6, nem todos os grupos fizeram uso do Mira para resolver esta tarefa.

Tabela 6

*Registo dos grupos que utilizaram ou não o Mira na resolução da tarefa sobre a bissetriz de um ângulo*

Grupo	Utilizou o Mira	Não utilizou o Mira
$G_I$		✓
$G_{II}$	✓	
$G_{III}$	✓	
$G_{IV}$	✓	
$G_V$		✓

Pela observação da tabela 6, é possível reparar que dois grupos não fizeram uso do Mira para realizar esta tarefa. No caso do grupo  $G_V$ , os alunos não conseguiram mesmo realizar a

tarefa e só responderam à tarefa depois de discutida no quadro. Já no grupo  $G_I$ , todos os alunos realizaram a tarefa com o uso da régua e do transferidor, como se mostra de seguida.

*Paulo:* Eu posso desenhar um ângulo de  $180^\circ$ ?

*Professora:* Podes.

*Helder:* Põe  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

*Paulo:* O  $B$  é no meio ou é no fim?

*Helder:* É no meio.

(...)

*Helder:* Ah, é fácil... Tu és 45, porque é a dividir por dois.

*Adriana:* E eu 30.

*Helder:* Sim, e tu [Paulo] és 90. Eu sou... Não sei. Porque fui escolher este!

*Paulo:* Dá 29.

*Helder:* Dá 29. Oh, dá-me esse [transferidor].

*Adriana:* Então é para traçarmos assim uma linha?

*Helder:* É para marcar um ponto.

Como se pode constatar neste diálogo o aluno Paulo também apresenta dificuldade na identificação do ângulo. Pode-se verificar que este grupo também se socorreu das amplitudes dos ângulos, nomeadamente de metade da amplitude do ângulo construído, para garantir que o ponto estivesse à mesma distância. Aliás, esta foi a conceção a que toda a turma acaba por socorrer para resolver a questão e assim descobrir uma característica da bissetriz de um ângulo.

### 3.2. Régua, compasso e transferidor

O material de desenho e de medida foi utilizado em todas as aulas lecionadas, no entanto, em determinadas tarefas, estes materiais didáticos assumiram maior importância, em particular para a consolidação de conceitos e para a elaboração de conjecturas. Assim, de seguida, apresenta-se a análise das tarefas *Ângulos congruentes*, *Triângulo SOL* e *O jogo Angry Birds*.

Ao longo das diversas aulas, na construção de figuras geométricas no papel, através do material de desenho e medida, tentou-se dar ênfase à leitura de propriedades e descrição de figuras assim construídas, orientando para que as propriedades geométricas das figuras não fossem lidas somente a partir daquele desenho específico da figura geométrica, mas que fosse analisada tendo em vista as propriedades gerais da classe de figura a que ela pertence (Rossini, 2010).

### 3.2.1. Tarefa *Ângulos congruentes*

Na tarefa que se apresenta de seguida irei analisar a alínea 1., já que foi nesta alínea que os alunos mostraram mais dificuldades, nomeadamente na manipulação do transferidor. Irei também fazer referência a uma situação que ocorreu na questão 1.1. Não irei analisar esta alínea pelo facto de os alunos, nesta fase, apenas terem de reproduzir os passos de construção da bissetriz de um ângulo, que já tinha sido aprendida anteriormente à realização desta tarefa.

- 
1. Com a ajuda de um transferidor, constrói dois ângulos. Um com  $43^\circ$  e outro com  $115^\circ$  de amplitude.
- 

#### 1.1. Utilizando material de desenho, constrói a bissetriz de cada um dos ângulos.

---

Na questão 1. espera-se que os alunos construam dois ângulos, cada um com determinada amplitude. Para esta construção é necessário que os alunos saibam trabalhar com o transferidor. No entanto, pela observação da aula reparou-se que 56% dos alunos assumiram que não sabiam trabalhar com o transferidor e pediram ajuda para fazer a construção. Apesar do transferidor ser um material de medida que os alunos já utilizam desde muito cedo, é no entanto notório que revelam muitas dificuldades em manipulá-lo. Veja-se, a título de exemplo, o diálogo da aluna Eva que demonstra essa dificuldade.

*Eva:* Ó professora nunca sei aqui, quando é pela parte de cima ou de baixo.

*Professora:* Então vamos construir a partir daqui, certo?

*Eva:* Certo.

*Professora:* Marcamos o ponto que vai ser a origem das semirretas. Tá bem? Que vai ser o vértice do ângulo. Então agora eu tenho que pôr a cruzinha ali e esta linha vai alinhar com aquela.

*Aires:* Então começa por baixo.

*Professora:* Começa por baixo, não sei o que é por baixo. E agora 43. Então se estou aqui a começar abrir o ângulo, vou começar abrir o ângulo, abro o ângulo assim.

*Eva:* Ah sim.

*Professora:* Então vou abrir, 10, 20, 30, 40, 43. Agora, quando é que é daqui Aires? Se eu quiser marcar a amplitude deste ângulo aqui...

*Eva:* Já percebi.

*Professora:* Eu vou pousar aqui e vou medir 35. Mas se eu quiser medir esta, estou a começar aqui, o lado está aqui, então por isso é que [vejo] dos dois lados, 10, 20, 30 e agora marcas tu, está bem?

O facto de os transferidos poderem ser lidos da esquerda para a direita e vice-versa confunde os alunos e estes mostram dificuldade em saber qual a escala a consultar. Outra situação foi observada no aluno Paulo que, em vez de marcar o ângulo com  $115^\circ$ , marcou um ângulo com  $105^\circ$ , devido a esta possibilidade de ler o compasso nos dois sentidos. Mais ainda, os alunos Célia e José construía um ângulo a partir de uma reta em vez de uma semirreta, pelo que efetivamente os alunos estariam a construir mais do que um ângulo. Neste caso, os alunos parecem não ter noção do conceito de ângulo correto.

Tradicionalmente, a definição de ângulo encontrada nos manuais é a definição de Arnaud e Bertrand, do séc. XVII, que define ângulo como sendo “parte do plano compreendida entre duas semirretas com a mesma origem” (cit Gomes & Ralha, 2005, p. 116). No entanto, se os alunos se socorrerem desta definição para manusear o transferidor, esta parece ter limitações e não ajudar a esclarecer. Para ultrapassar esta dificuldade, seria pertinente os alunos terem conhecimento, por exemplo, da definição de ângulo de Sannia e d’Ovídio para os quais, um “ângulo é uma rotação, operação que transforma uma semirreta noutra semirreta com a mesma origem” (in. Gomes & Ralha, 2005, p. 116). Como Gomes e Ralha (2005) referem, o conceito de ângulo, como quase todos os conceitos matemáticos, é multifacetado, pelo que admite várias definições, sendo que qualquer uma delas impõe limitações específicas ao conceito de ângulo. Por isso, segundo estas autoras, os professores devem estar conscientes das diferentes definições e suas limitações, pois só dessa forma estarão aptos para proporcionarem aos seus alunos atividades significativas que desenvolvam este conceito. Assim, se o professor transmitir esse conhecimento ao aluno, e este tiver conhecimento da existência dos vários conceitos, perante uma adversidade, poderá mobilizar o conceito que melhor o ajudará a dar resposta à mesma. Muitos alunos, para ultrapassarem esta dificuldade, desenharam ângulos com amplitudes que lhe eram familiares, nomeadamente, ângulos de 90 e 180 graus.

Ainda para a alínea 1.1., é de salientar uma fala da aluna Eva que trata o compasso por *sensível*, como se mostra de seguida.

*Eva:* Ai que cena marada. É mesmo sensível este sensível. Não gosto deste sensível. Esquece, mister sensível fora!

É de evidenciar que o facto de a aluna, e inclusive de todo o grupo, tratar o compasso por *sensível* ocorreu nesta aula e estendeu-se a todas as aulas seguintes, devido ao compasso estar a funcionar mal e facilmente alterar a sua abertura, o que dificultava as construções.



### 3.2.2. Tarefa *Triângulo SOL*

Na tarefa *Triângulo SOL*, que se expõe de seguida, só irei analisar a alínea 1., por ser nesta que os alunos tinham de fazer uma construção, e por isso, necessitam de manipular os materiais de desenho e medida.

- 
1. Constrói um triângulo [*SOL*], sabendo que  $\overline{SO} = 4,5 \text{ cm}$ ;  $\overline{OL} = 6 \text{ cm}$  e  $\overline{LS} = 7,5 \text{ cm}$ .
- 

A matéria que os alunos tinham de invocar para fazer a construção necessária nesta questão é dada no 5.º ano de escolaridade. Nesta tarefa, os alunos assumiram essencialmente duas estratégias: inicialmente a maioria dos alunos começou por tentar construir o triângulo recorrendo a um processo de tentativa e erro, com o auxílio de uma ou mais régua e, outros alunos, fizeram a construção com régua e compasso. O diálogo seguinte pretende mostrar como o grupo  $G_{III}$  tenta realizar a questão, seguindo dois caminhos, ambos por tentativa e erro.

*Dinis:* Qual é o tamanho que puseste primeiro?

*Marta:* Olha eu fiz sete e meio, depois meti uma régua seis, depois meti outra quatro e meio.

*Dinis:* Então eu vou por aqui sete e meio.

(...)

*Sónia:* Ui não me dá certo ó Eduarda.

*Eduarda:* Tens de andar aí a jogar com as medidas.

Neste grupo, os alunos assumem a estratégia de tentativa e erro por dois caminhos de dois elementos do grupo. A aluna Eduarda, com uma régua faz várias tentativas até construir o triângulo desejado, induzindo a colega Sónia a fazer da mesma forma. A aluna Marta, por sua vez, socorre-se de três régua para fazer encaixar as três medidas do comprimento dos lados dadas.

Por fim, a maioria dos alunos terminaram por realizar a tarefa com o compasso, pois reconhecem que é difícil tentar acertar com as medidas.

*Adriana:* O que é que estás a fazer?

*Paulo:* Sei lá. É a Teoria da Relatividade, como Einstein.

*Adriana:* Ouviste o que ele disse? É a teoria da relatividade.

*Paulo:* Ah... não dá certo.

(...)

*Paulo:* Tu vais ver como a minha teoria vai dar.

(...)

*Paulo:* Ó invento. Olha para isto, certinho.

*Helder:* Conseguiu?

*Paulo:* Mas era difícil. Olha já fiz. Viste deu certo a minha teoria.

*Adriana:* Deu?

*Helder:* Olha a mim dá-me 5,9.

*Adriana:* Como é que tu fizeste um ângulo de 90?

*Elsa:* Isto não está bem, isto está meio inclinado.

*Paulo:* Mas dá um ângulo de 90. Se virares assim...

(...)

*Paulo:* Este triângulo é o quê, reto não é?

*Helder:* Não sei.

*Elsa:* Tem os lados todos diferentes, é isósceles.

*Helder:* Mas não pode dar 90. Como é que pode, não faz sentido, e depois nos outros dá 53 e o outro 31.

*Elsa:*

Vês a mim não dá.

*Helder:* Dá, dá. A mim dá, quer dizer, acho eu, mostra. Vês deu 90... Ho, dá 91.

(...)

*Helder:* Eu acho que descobri outra maneira de fazer mais fácil.

*Adriana:* Ele também já descobriu isso, com o compasso.

*Helder:* A sério. Ele está esperto meu!

*Elsa:* Ele nunca foi burro.

*Helder:* Eu nunca disse isso, mas também...

Neste diálogo é possível reparar que o aluno Paulo, que é um aluno com nível de desempenho fraco, não foi ouvido pelos colegas do grupo. No entanto, no fim da atividade, os colegas reconhecem-lhe o mérito e o aluno esboçou um evidente sorriso. Esta é uma vantagem referida na literatura, pois com os materiais manipuláveis os alunos com mais dificuldades têm maior probabilidade de realizarem as atividades com sucesso.

### **3.2.3. Tarefa *O jogo Angry Birds***

A tarefa que se apresenta de seguida foi apresentada aos alunos para introduzir o conceito de incentro e circuncentro. No entanto, devido ao facto da questão 2 seguir a mesma linha de pensamentos da questão 1, neste relatório analisa-se apenas a questão 1, correspondente ao conceito de circuncentro. Mais ainda, na análise será dada maior ênfase à alínea 1.1. por ser nesta que se pressupõe uma atividade de investigação com recurso aos materiais manipuláveis.

---

1. A Figura 1 representa um campo do jogo Angry Birds.

Supõe que, num determinado momento do jogo, os pássaros coloridos colocaram-se todos à mesma distância do ninho dos ovos.

1.1. Assinala, com a letra  $N$ , o ponto onde se encontra o ninho dos ovos, tendo em conta a posição dos pássaros na figura 1.



Figura 1

1.2. Descobre, pesquisando nas páginas 30 e 31 do teu manual, o nome e as características do ponto  $N$  que encontraste.

---

Para dar resposta a esta questão, os alunos tiveram de pensar e elaborar as suas estratégias de resolução para encontrar o ponto  $N$  da alínea 1.1. Note-se que os alunos já tinham trabalhado os lugares geométricos no plano, necessários para resolver esta questão, como se pode ver na tabela 3, apresentada no início do capítulo. Para dar início à análise desta tarefa, procedeu-se ao levantamento das estratégias de resolução e à ordem pelas quais foram adotadas pelos diferentes grupos, como se pode ver na tabela 7.

Tabela 7

*Ordem das estratégias de resolução adotadas pelos grupos para a resolução da questão 1.1. da tarefa O jogo Angry Birds*

Grupos	Tentativa e erro		Mediatriz/Bissetriz
	Compasso	Régua	
$G_I$			1 <sup>a</sup>
$G_{II}$	1 <sup>a</sup>		2 <sup>a</sup>
$G_{III}$	1 <sup>a</sup>		2 <sup>a</sup>
$G_{IV}$		1 <sup>a</sup>	2 <sup>a</sup>
$G_V$		1 <sup>a</sup>	

Pela análise da tabela 7, é possível ver que apenas o grupo  $G_I$  pensou de imediato em aplicar a matéria lecionada nas aulas anteriores, graças ao contributo de um aluno. Vejamos, então, o raciocínio desenvolvido por este grupo para a resolução desta tarefa.

*Helder:* Já sei, já sei. Tipo, pegamos no... Eu acho que devíamos fazer a mediatriz de todos.

*Elsa:* Mas está aqui o ninho dos ovos.

(...)

*Helder:* Não.

*Adriana:* Sim.

*Helder:* Tipo aqui diz os pássaros colocaram-se todos à mesma distância do ninho dos ovos tá? Então o ninho dos ovos está aqui no meio, porque se estão todos à mesma distância...

*Adriana:* Ó stora o ninho dos ovos é isto? (Alunas perguntavam se o desenho que estava no canto inferior direito era onde estavam os ovos.)

*Professora:* Não, vocês é que têm de descobrir aonde é que está [o ninho].

*Helder:* Eu sei, se traçar as mediatrizes de todos os lados e depois encontramos o meio.

*Professora:* O Helder já pensou em alguma coisa, discutam a ideia dele.

*Elsa:* Tinha que ser...

*Adriana:* E como é que tu vais fazer isto?

*Helder:* Fazes assim este. (Referindo-se ao segmento de reta que une dois dos pássaros) Agora vou fazer neste.

(...)

*Adriana:* Paulo faz o triângulo.

*Paulo:* Pois mas é que eu tenho uma dúvida. Por exemplo, se eu traçar o traço até aqui ou, por exemplo, até aqui já vai mudar [a forma] do triângulo, não é?

Aluna Adriananão não deu resposta ao colega e chamou pela professora para a interrogar sobre esta dúvida.

*Professora:* É indiferente.

*Paulo:* Ai é?

*Professora:* É. Quer dizer, tem que estar lá no pássaro, não é.

O aluno Paulo levantou uma questão pertinente, pois devido à dimensão dos pássaros, os alunos iriam ter triângulos diferentes, consoante onde considerassem os extremos dos segmentos de reta correspondentes aos lados do triângulo. No caso de não usarem sempre os mesmos pontos representativos dos pássaros nas construções, o grau de imprecisão era grande e não permitia que as mediatrizes se intersectassem todas num único ponto, ou seja, não conseguiam encontrar o circuncentro. Assim, os alunos foram alertados pela professora para o facto de terem de definir pontos representativos nos pássaros, pois estes definiam pontos muito grandes, e que seriam esses pontos representativos que teriam de utilizar sempre nas construções.

Ainda pela análise da tabela 7, apresentada atrás, é possível constatar que todos os outros grupos começaram por tentar encontrar o ponto  $N$  por tentativa e erro. O grupo  $G_V$  não conseguiu mesmo desenvolver mais nenhuma estratégia para resolver a questão, acabando por ver pelos colegas de outros grupos como se resolvia. Os outros grupos foram tentando encontrar o ponto através de medições com a régua ou com o compasso. De seguida, vamos ver como o grupo  $G_{III}$  desenvolve o seu raciocínio com a utilização do compasso nesta tarefa.

*Sónia:* Como é que é para fazer?

*Marta:* Não sabemos que não está a dar certo.

*Dinis:* Diz como estás a pensar e assim pensamos todos.

*Marta:* Da mesma maneira e não me deu.

*Eduarda:* Exatamente.

*Marta:* Tenta praí. Não chega a nenhum. Ou chega ou passa, não dá.

*Eduarda:* Mas não pode ser assim. Só se traçarmos assim e depois traçarmos a bissetriz.

*Marta:* Realmente.

*Eduarda:* Mas não. Fica à mesma distância das retas não dos pássaros. Bem vamos tentar.

*Marta:* Mas não é preciso olha, aqui diz pesquisando as páginas 30 e 31 do teu manual, o nome e as características do ponto que encontraste... Ah vez, vamos fazer o triângulo.

*Eduarda:* E como é que descobres o centro do triângulo? Tens de traçar a mediatriz.

*Marta:* Não, a circunferência.

*Eduarda:* Não.

*Marta:* Não dá.

*Eduarda:* Não dá porque estás a tentar fazer à sorte.

*Marta:* Pois.

(...)

*Eduarda:* Oh, isto é preciso muita precisão!

Pela análise do diálogo, verifica-se que após tentarem encontrar o ponto com o auxílio do compasso, as alunas encontram-se divididas entre construir a bissetriz ou a mediatriz, mas é só a partir da consulta do manual que decidem construir a mediatriz.

De seguida, veja-se quais são as estratégias adotadas pelo grupo  $G_{IV}$ .

*Célia:* Estão todos à mesma distância? Então é praí aqui assim.

*Professora:* Então testem. Será que é aí ou não?

*Célia:* É com o compasso não é?

*Anita:* É como fizemos no outro dia.

*Professora:* Como quiserem. Tu achas que é aqui, como é que podes ter a certeza se é esse ou não?

*Célia:* Tenho de medir.

*Professora:* Pronto.

*Célia:* A minha régua não dá para medir, sinceramente.

(...)

*José:* É este.

*Anita:* Esse não. Tens de arranjar um ninho de pássaros que esteja à mesma distância dos três.

*Célia:* Olha fazes assim... Quando temos uma reta podemos fazer uma reta aqui e traçamos os pontos assim, fazemos uma reta aqui e fazemos os pontos assim, outra reta assim e os pontos assim. Eu sei, já sei.

Note-se que a aluna Célia, quando está a explicar aos colegas o que pensou, refere-se a reta querendo referir-se ao segmento de reta que une dois pássaros. No entanto, durante as aulas, este foi um erro que os alunos cometiam com muita frequência.

Nesta tarefa, para a construção do circuncentro, é muito importante fazer as construções com o máximo de rigor e, por isso, os alunos demoraram, em média, 37 minutos a resolver esta alínea 1.1. Devido ao rigor necessário para as construções, em todos os grupos, ouviu-se várias queixas e discussões entre os alunos relativamente ao mau funcionamento dos compassos, como se exemplifica de seguida no grupo  $G_{II}$  e no grupo  $G_{IV}$ , respetivamente.

*Eva:* Ó professora o meu compasso está deficiente.

*Professora:* Pois, os compassos...

*Eva:* Olhe para isto, i e, i e. Parece a Eduarda em ginástica.

Enquanto a professora verifica a construção da aluna José estabelece-se o seguinte diálogo:

*Anita:* Ah! Você não vá lá com o compasso que eles estão todos estragados.

*José:* Que mal!

*Anita:* Ó stora é o compasso, não tenho culpa.

*Professora:* Mas isto depois não bate direitinho, sabes.

*Anita:* Mas já está, o que interessa é nós sabermos como fizemos, não é se está direitinho ou não.

*José:* Ai não!

*Célia:* Não, para o exame vê se não fazes direitinho.

*Anita:* Um milímetro e está tudo mal.

Este grupo parece desvalorizar o erro cometido nas construções mesmo não obtendo o que era pretendido. No entanto, como estão em ano de exame nacional, o erro já assume maior importância e os alunos passam a tomar mais atenção ao que estão a fazer quando são alertados para essa situação.

De seguida, apresenta-se, na tabela 8, as vantagens e desvantagens que se verificaram e que se podem retirar desta tarefa exploratória.

Tabela 8

*Registo das vantagens e desvantagens observadas na tarefa O jogo Angry Birds*

Vantagens	Desvantagens
Motivação dos alunos e da professora.	Meio de distração dos alunos devido ao tema familiar da tarefa.
Incentivo à conexão de matéria já lecionadas.	Meio de ruído e movimento dos alunos.
Experimentação e exploração de várias possibilidades.	A falta de rigor nas construções.
Aprender a utilizar os materiais como descoberta matemática	Tempo despendido para dar resposta à questão exagerado.
Despoletar de discussão entre os alunos.	
Integração da visualização matemática.	

Contrapondo as vantagens com as desvantagens, prevalecem em maior número as vantagens. Note-se que as vantagens registadas são todas elas de elevada importância para uma aprendizagem significativa. Quanto às desvantagens registadas, a maior parte dizem respeito ao movimento dos alunos com os materiais manipuláveis.

### 3.3. Recortes de papel

A aula 4, com ênfase neste projeto, foi toda ela dedicada ao estudo da soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de polígonos convexos.

Num primeiro momento, recorrendo a uma aplicação no geogebra, ilustrada na figura 4, pretendeu-se, de uma forma rápida, rever alguns dos conceitos já aprendidos pelos alunos em anos letivos anteriores e que seria importante terem presentes para o novo subtópico em estudo. Também foi a partir desta explicação que os alunos ficaram alertados para o facto de nesta unidade só analisarem polígonos convexos.

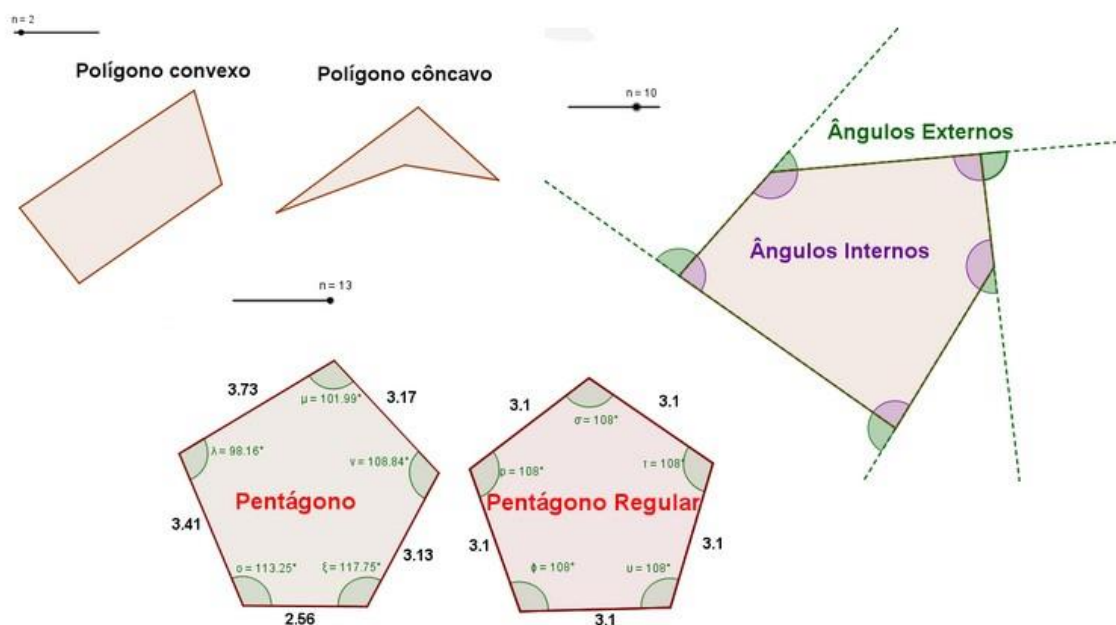


Figura 4. Imagem ilustrativa da aplicação feita no Geogebra para a sexta aula.

Num segundo momento, propõe-se uma atividade de investigação (anexo IV), onde se pretende que os alunos realizem recortes de papel e montem esses recortes com o objetivo de conjecturarem sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos e externos de um polígono convexo. Acerca deste tipo de atividades, Olson (1975) refere que, dado que o princípio mais importante para a aprendizagem da matemática é proporcionar experiências em que os alunos têm um desempenho ativo, a dobragem de papel propicia esse tipo de atividades, nos vários níveis de ensino. Olson (1975) e Row's (1979) referem que este género de atividades qualquer tipo de papel serve, apesar de haver alguns mais apropriados e apelativos.

Assim, nesta aula, foi necessário fornecer aos alunos uma tesoura para cada aluno, tubos de cola para cada um dos grupos e polígonos em papel cartolina de  $250 \text{ g/m}^2$  para cada grupo. A cada grupo foi fornecido cinco polígonos convexos, de quatro a oito lados cada um, mas



diferentes em cada um dos grupos. Com base na informação recolhida durante a intervenção, de seguida irei começar por apresentar uma breve análise da tarefa sobre a soma das amplitudes dos ângulos internos de um polígono com  $n$  lados, seguida da análise da tarefa sobre a soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono com  $n$  lados.

### 3.3.1. Tarefa sobre ângulos internos de um polígono convexo

Aquando da entrega da primeira parte da tarefa (anexo IV), referente à soma das amplitudes dos ângulos internos de polígonos convexos, os alunos demoram alguns minutos a iniciá-la. A título de exemplo, veja-se a aluna Eduarda do grupo  $G_{III}$ , que tentou resistir à atividade dos recortes e às montagens do papel e tentou fazer sem passar por essa fase. Aluna lê a tarefa, pega no lápis e no transferidor do porta lápis e começa a preencher a tabela com base nos dados da primeira coluna. Ao olhar para a tarefa e ao ler o enunciado da mesma, a aluna começa por interagir com um membro do grupo.

*Eduarda:* É suposto fazermos isto aqui?

*Marta:* Acho que é ali. (A apontar para a folha com os polígonos.) Tipo, a seguir diz que é para recortar.

*Eduarda:* Ah... Então vou fazer primeiro aqui.

(...)

*Dinis:* Porque é que estás a fazer sozinha? Explica ao teu grupo?

Os alunos entram numa pequena discussão devido ao facto de o aluno Dinis não gostar que a colega Eduarda não explique ao grupo o que está a fazer para resolver a tarefa, antes de o começar a fazer. No entanto essa discussão não obteve demais consequências. De seguida, o resto do grupo passa a seguir a mesma estratégia da aluna Eduarda e tenta preencher a tabela sem realizar os recortes de papel. Entretanto, a professora passa pelo grupo e a aluna olha para ela no sentido de confirmar se o que estava a fazer estava certo e entram em diálogo.

*Professora:* Pois, não queres fazer... depois fazes mal.

*Eduarda:* Porquê?

*Professora:* Porque está mal, não é  $360^\circ$ .

*Marta:* Vês, eu disse-te.

*Eduarda:* Então é quanto?

*Professora:* Tens de fazer para descobrir.

*Eduarda:* Oh stora...

*Professora:* Quem tem a folha dos polígonos?

*Dinis:* Sou eu. (O aluno retira a folha do meio do caderno.)

*Professora:* Não é para guardar, é para trabalhar, minha gente.

*Dinis:* E eu já olhei para ela *pra* vinte vezes.

*Eduarda:* Ok, deixa ver o transferidor e vamos medir isso.

(...)

*Professora:* Que estás a fazer [Eduarda]? (Professora esboça um ar de riso.)

*Eduarda:* A medi-los.

*Professora:* Olha, se tiver aí um ângulo de  $90,05^\circ$ , eu quero que tu o meças.

De seguida a aluna começa a rir-se, pousa o transferidor e pega num polígono que entretanto os colegas já tinham recortado da folha. Claramente, a aluna percebeu que iria ter dificuldade em ser rigorosa com a medição dos ângulos e que fazer os recortes seria a melhor forma de realizar a tarefa. A própria professora esboçou um sorriso por ver tanta resistência da parte da aluna para realizar a actividade, uma vez que já era espectável que algum aluno procedesse de tal forma.

Apesar de se tratar de uma atividade relativamente simples, os grupos apresentaram algumas dificuldades ao longo da sua realização. Assim, no quadro 2, pode observar-se as principais dificuldades com que cada grupo se deparou.

Quadro 2

*Dificuldades apresentadas pelos grupos aquando da realização da atividade sobre a Soma dos Ângulos Internos de um Polígono de  $n$  lados*

Dificuldades na atividade de ângulos internos de um polígono de $n$ lados	$G_I$	$G_{II}$	$G_{III}$	$G_{IV}$	$G_V$
Definição de polígono convexo.	X				
Definição de diagonal de um polígono.		X	X		X
Não marcar as diagonais a partir de apenas um dos vértices do polígono.	X			X	
Determinar a amplitude dos ângulos internos dos polígonos concretos da tabela.		X			X
Conclui somando amplitude dos ângulos internos de todos os polígonos concretos da tabela.		X			
Concluir por não marcar bem as diagonais		X		X	

Em geral, pela análise do quadro 2, verifica-se que as dificuldades estavam associadas ao conteúdo matemático e não à manipulação do material em si, pelo que o material parece adequado à atividade em questão. O grupo  $G_{II}$  foi o grupo que apresentou mais dificuldades, opondo-se ao grupo  $G_{IV}$ , que apresentou apenas uma das dificuldades identificadas. No

entanto, é de salientar que, apesar do grupo  $G_{IV}$  não apresentar dificuldades significativas, não significa que não tenha havido intervenção da professora. Para este grupo a intervenção da professora foi necessária no sentido de confirmar se o que estavam a fazer estava certo ou errado.

O grupo  $G_I$  apresenta dois tipos de dificuldades. Veja-se que este grupo começa por discutir como desenhar as diagonais dos polígonos e se os polígonos que estão na folha são convexos ou não. Neste sentido, o aluno Helder começa por indicar aos colegas, com o auxílio da régua, todas as diagonais possíveis de um dos polígonos. De seguida, a aluna Adriana, que estava a tentar desenhar as diagonais, diz:

*Adriana:* Oh façam vocês que eu vou escrever o sumário.

*Helder:* Vou fazer num e vocês fazem nos outros.

(...)

*Elsa:* São todos convexos certo?

*Helder:* Isso não interessa.

*Elsa:* Mas tens de saber que só é para fazer nos convexos?

O aluno Helder: torna a ler a tarefa e volta a falar.

*Helder:* O que é que são polígonos convexos?

*Elsa:* A stora teve a dizer.

*Helder:* Mas eu tive a fazer outra coisa.

*Elsa:* Pois...

*Helder:* Mas então não entendeste.

A aluna Adriana acaba de escrever o sumário e explica aos colegas o que entendeu sobre polígonos convexos. E assim concluíram que todos os polígonos que a professora lhes forneceu eram convexos e procederam à realização da tarefa.

Vejamos como o grupo  $G_{IV}$  começa a discutir a tarefa e até consegue concluir.

*José:* Soma da amplitude dos ângulos internos...

*Célia:* Como é que nós vamos saber isso com os lados?

*José:* Se isto dá...

*Célia e José:*  $360^\circ$ .

*Célia:* Lógico, porque, ou seja, não sei...

*José:* Mas todos eles têm de dar  $360^\circ$ . Ou não? Ou é só um polígono com quatro lados? Vamos cortá-los que ainda não os cortamos, só depois é que podemos preencher.

(...)

*José:* Stora? Aqui a soma da amplitude dos ângulos é 360.

*Professora:* Ângulos internos do polígono.

*José:* Sim. É 360 não é?

*Professora:* Não sei. Porque é que é 360?

*José:* Como tem dois triângulos é 180 mais 180. E, e os outros?

*Célia:* Olha fazes o mesmo raciocínio do...



*Professora:* Quantos triângulos tem este?

*José:* Tem três. Ou seja dá três vezes 180.

Este grupo apresenta um raciocínio correto, mas, principalmente um aluno, mostra-se hesitante e é com a intervenção da professora que o grupo ganha confiança.






Por fim, é de referir dois aspetos que decorreram durante a aula. Um dos aspetos é o facto de a professora ter a necessidade de dizer a toda a turma para cortarem os polígonos que estavam numa única folha em cada grupo, e distribuir cada polígono por cada um dos elementos do grupo, pois estava um único aluno a recortar os polígonos da folha e demoraria mais tempo. Este aspeto demonstra a falta de autonomia da turma, pois foi necessário a professora referir explicitamente que era um polígono para cada um dos elementos do grupo. O outro aspeto prende-se com o facto de os alunos perderem algum tempo a fazer a colagem dos recortes na folha da tarefa, pelo que acabou por ser pedido que o fizessem em casa.



Desde já saliento que, em dois dos grupos, no último polígono que tem oito lados, ao diminuir a sua dimensão para colocar na tabela, um dos vértices ficou despercebido. Por este motivo, os grupos ao fazerem a contagem dos lados de cada polígono pela tabela para este polígono, foram induzidos em erro e fizeram conclusões erróneas, como mostra na figura 5.

	7	5	$5 \times 180^\circ$ $100^\circ$
	8	6	$6 \times 180^\circ$ $1080^\circ$
	n	$n-2$	$(n-2) \times 180^\circ$

*Figura 5.* Produção do aluno José na tarefa sobre ângulos internos de um polígono.

Concluindo, todos os grupos, com mais ou menos ajuda, conseguiram perceber o raciocínio e chegar ao que lhes era pedido. Concluindo, todos os grupos, com mais ou menos ajuda, conseguiram perceber o raciocínio e chegar ao que lhes era pedido. De seguida, a figura 6 mostra a resolução da atividade pela aluna Manuela.

Polígono	Número de lados	Número de triângulos	Soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono
	4	2	360°
	5	3	540°
	6	4	720°
	7	5	900°
	8	6	1080°
	$n$	$n - 2$	$(n - 2) \times 180$

*Figura 6.* Resolução da aluna Manuela na tarefa sobre a soma de ângulos internos de um polígono.

Esta tarefa foi uma tarefa em que se registaram muitas das vantagens da utilização dos materiais manipuláveis defendidas por diversos autores. Neste sentido, associando com a figura 6 destaca-se a possibilidade de os alunos poderem experimentar e explorar várias possibilidades. Em relação ao hexágono da Manuela, ela fez os recortes como era pedido no enunciado, mas na folha de respostas ela coloca outra possibilidade de dividir o polígono em triângulos, de forma a que os ângulos internos desses triângulos correspondam aos ângulos internos do hexágono. A aluna testou outra forma de dividir o hexágono para tirar as conclusões pedidas. No entanto, a Manuela não se estendeu quanto ao facto de saber se existe outra divisão em triângulos, sem ser a que é pedida no enunciado, para poder tirar relações sobre o resto dos polígonos. Esta situação teria até sido pertinente de discutir em sala de aula com toda a turma, já que mais nenhum aluno se interrogou quanto ao facto de saber se a divisão em triângulos pedida no enunciado era única.

### 3.3.2. Tarefa sobre ângulos externos de um polígono convexo

A segunda parte da tarefa (anexo IV), respeitante à soma das amplitudes dos ângulos externos de um polígono convexo, foi menos demorada, uma vez que os alunos já não ofereceram resistências. Nesta tarefa, os polígonos traziam desenhados os ângulos externos correspondentes a cada polígono, para facilitar o processo de recorte e para que os alunos não demorassem muito tempo a elaborar as conjecturas pretendidas.

Ao longo da atividade, mais uma vez não se registaram dificuldades no manuseio dos materiais mas sim nos conceitos envolvidos. A dificuldade mais significativa dos alunos nesta atividade foi a identificação e, consequentemente, o recorte dos ângulos externos. Quanto maior fosse o número de lados do polígono, os ângulos externos teriam menor amplitude, pelo que estão mais próximos uns dos outros, o que confundia mais os alunos. A título de exemplo, veja-se a dificuldade de uma aluna do grupo  $G_I$ .

*Professora:* Ora aponta-me com o dedo o ângulo externo.

*Carla:* Aqui.

*Professora:* Mas não é só isso, pois não?

*Carla:* Ah, também aqui.

*Professora:* Então tens de cortar pelos lados do ângulo.

Aluna começa a recortar, mas ainda com hesitação.

*Carla:* Professora, estou a fazer errado?

*Professora:* Não estás a fazer... Ah... Estás a fazer bem, mas tens de cortar também por aqui. (Aponta com o dedo para o polígono da aluna.) Tens de cortar pelos lados do ângulo.

*Carla:* Cortar assim?

*Professora:* Sim.

*Carla:* Mas isso não vai cortar os outros ângulos?

*Professora:* Não, não te preocupes.

*Carla:* Então faço assim?

*Professora:* Sim. Olha e agora qual é o outro lado deste ângulo?

*Carla:* Este. E tenho que cortar por aqui?

*Professora:* Muito bem. E já vais ter um ângulo.

*Carla:* Ah...

Assim, através do diálogo entre a professora e a aluna Carla, repara-se que a dificuldade desta no processo de recorte resultava do entendimento que a aluna tem de ângulo. O facto de ao recortar um ângulo externo de um polígono acabar por interceder o lado de outro ângulo externo, levava a aluna a ter receio de recortar pois poderia estragar o outro ângulo.

Esta atividade, apesar das resistências de alguns alunos em fazer os recortes, mostrou-se muito enriquecedora, pois todos os alunos conseguiram realizar e elaborar as suas conjecturas. A título de exemplo, veja-se o grupo  $G_V$  que é composto por alunos de níveis de desempenho fraco e do ensino especial.

*Luís:* Ei como é que eu vou cortar isto?

*Jade:* Corta [como seja]. Não vais medir as amplitudes e não.

(...)

*Jade:* Nós perdemos tempo é a cortar, não podemos ver por aqui?

*Professora:* Se conseguirem podem.

*Jade:* Ah... Então é melhor não. Anda lá [Luís], despacha-te a cortar isso.

(...)

*Professora:* Os lados já estão. Então vamos somar os ângulos. Somem aqui estes ângulos. Ajudem o Luís.

*Jade:* Somar como? Uni-los? Anda Luís meche as mãos.

*Professora:* Formei um ângulo de quê?

*Vera:* 360.

*Professora:* Então a soma dos ângulos externos do polígono é?

*Luís:* 360.

*Jade:* Ai é... Ah, agora temos de unir estes.

Como podemos verificar através do exemplo apresentado, alguns dos alunos apresentavam manifestos ao facto de demorarem a fazer os recortes e alguns alunos até referiam o facto de ser para concluir sempre o mesmo. No início, os alunos estranhavam o facto de a soma dos ângulos externos dos polígonos dar sempre  $360^\circ$ , mas acabaram por acreditar. Mesmo os recortes não sendo bem feitos e os encaixes dos ângulos não serem rigorosos, os alunos acreditaram que era  $360^\circ$ , como se pode verificar na figura 7.

Polígono	Número de lados	Soma das amplitudes dos ângulos externos do polígono
	4	360
	5	360
	6	360
	7	360
	8	360
	<b>n</b>	360

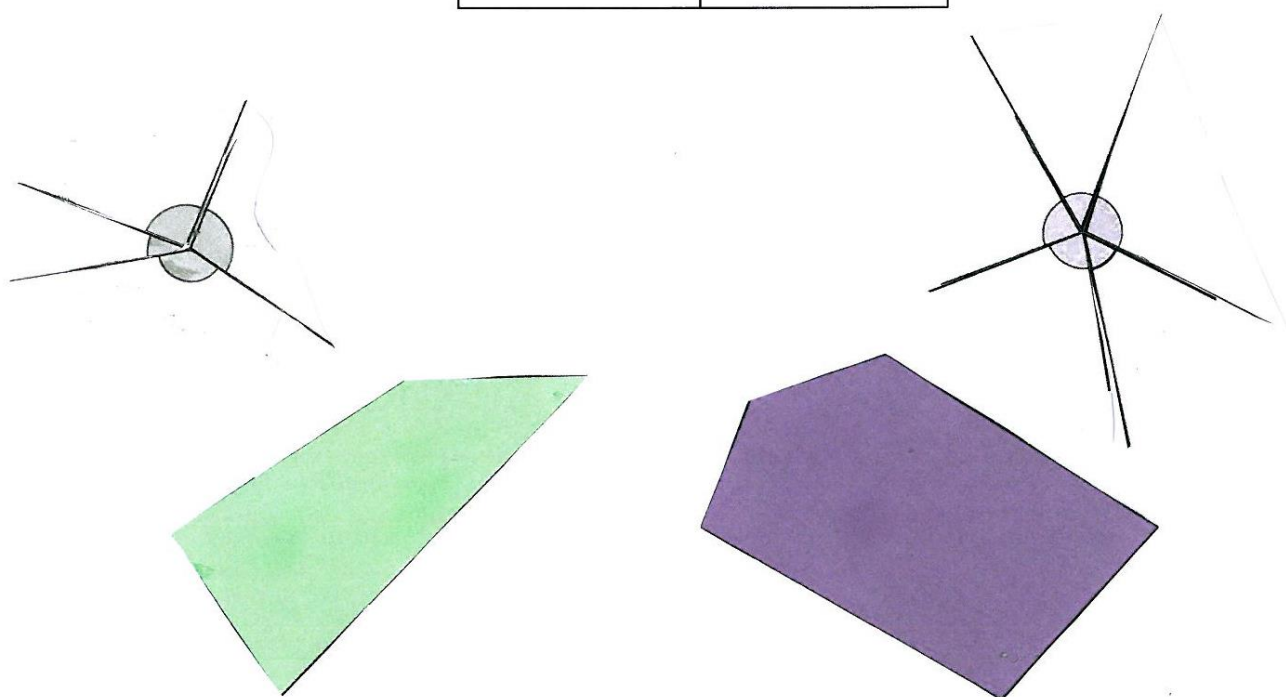


Figura 7. Resolução da aluna Eduarda na tarefa de ângulos externos de um polígono.

Após análise do material recolhido nesta aula, a tabela 9 pretende dar a conhecer as vantagens e desvantagens que se verificaram e que se podem retirar desta atividade com utilização dos recortes e montagem de papel.



Tabela 9

*Registo das vantagens e desvantagens observadas nas atividades dos recortes e montagens de papel*

Vantagens	Desvantagens
Motivação dos alunos e da professora.	Meio de distração devido às brincadeiras dos alunos.
Incentivo à experimentação.	Meio de ruído e movimento dos alunos.
Experimentação e exploração de várias possibilidades.	A falta de rigor dos recortes e das montagens.
Aprender a utilizar os materiais na descoberta matemática	Mais tempo despendido para obter as relações.
Diminuição do grau de dificuldade das tarefas.	
Despoletar de discussão entre os alunos.	
Integração da visualização matemática.	
Facilitador na passagem para o abstrato.	

Observando a tabela, é evidente que as vantagens observadas nestas atividades, ou seja, nesta aula, são claramente superiores às desvantagens registadas. As desvantagens registadas estão todas associadas à atividade com os materiais curriculares que os alunos tiveram de usar para realizar a atividade, mas que são inevitáveis neste tipo de atividades. Note-se ainda que as vantagens registadas são consideráveis, pois são impulsionadoras de uma aprendizagem significativa.

### 3.4. Avaliação

Nesta secção, serão apresentadas e analisadas as questões das fichas de avaliação (anexo V), realizadas durante o 2.º período. Note-se que a primeira ficha de avaliação foi realizada na semana que terminou esta intervenção, enquanto a segunda ficha de avaliação foi realizada um mês depois. Na tabela que se segue, apresentam-se os objetivos de cada questão considerada nas fichas de avaliação, relativas aos conteúdos de aprendizagem explorados durante a intervenção pedagógica com ênfase no projeto.

Tabela 10

*Objetivos das questões dos testes*

Teste	Questão	Objetivos
1	2	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar lugares geométricos no plano: mediatriz de um segmento de reta e circunferência.</li> </ul>
	7	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Consultar escalas gráficas.</li> <li>• Construir lugares geométricos no plano: mediatriz de um segmento de reta e circunferência</li> </ul>
2	4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Determinar a área de setores de polígonos regulares inscritos numa circunferência.</li> </ul>
	6	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar pontos no plano cartesiano.</li> <li>• Construir lugares geométricos no plano: circunferência e círculo.</li> </ul>

Deve-se ainda ter em conta que na primeira ficha de avaliação são considerados os resultados de dezassete alunos, uma vez que o aluno com necessidades educativas especiais tem um teste adaptado às suas necessidades. O mesmo sucedeu no segundo teste, mas neste só são considerados dezasseis alunos, pois, como foi referido na caracterização da turma, durante o segundo período mais um aluno passou a integrar o ensino especial e também este teve um teste adaptado às suas necessidades.

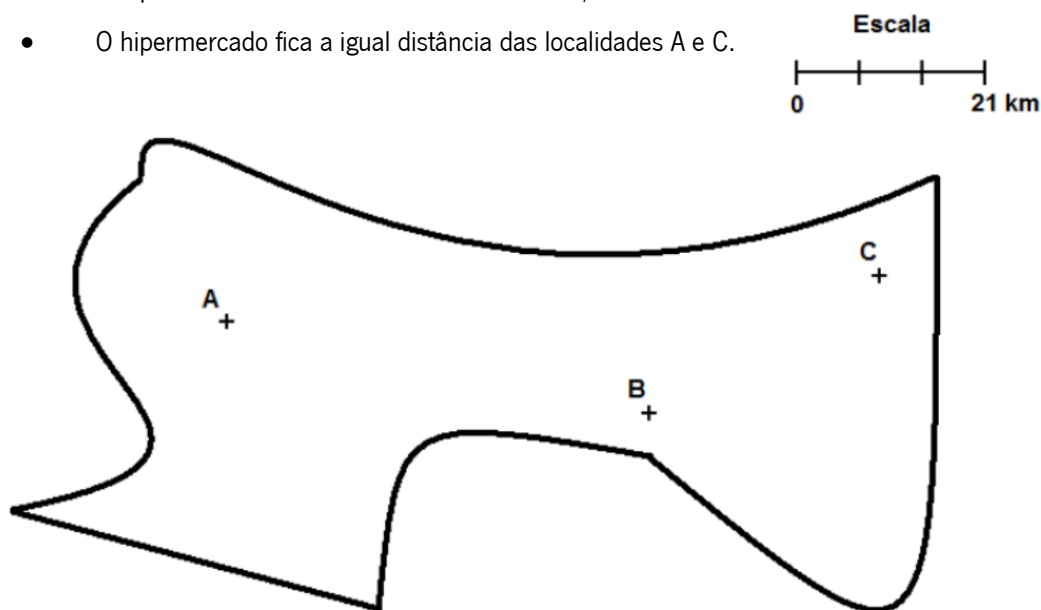
Dado o tema em estudo neste relatório e, com vista a dar resposta às questões colocadas, de seguida apresenta-se uma análise da questão 7 do primeiro teste e da questão 6 do segundo teste do 2.º período. Partindo destas questões, apresenta-se o seu enunciado, a percentagem de respostas corretas, parcialmente corretas, erradas e não respostas. Por fim, são referidas as formas como os alunos resolvem as questões, bem como os erros cometidos nas mesmas. Consideram-se respostas *corretas* as respostas sem qualquer tipo de erros; *parcialmente corretas* as respostas onde os alunos cometem algum tipo de erro ou não terminam a sua resolução, não tendo por isso a cotação máxima nessa questão; *erradas* as respostas cuja classificação foi zero pontos e as *não respostas* aquelas em que os alunos não apresentaram qualquer possibilidade de resolução da questão.

De seguida apresenta-se a questão sete da primeira ficha de avaliação do 2.º período.

---

A figura abaixo representa um mapa de uma região. A mãe do João trabalha numa empresa que pretende construir um hipermercado numa localização que obedece às seguintes condições:

- O hipermercado deve ficar dentro da zona delimitada pelo traço grosso;
- O hipermercado fica a 14 km da localidade B;
- O hipermercado fica a igual distância das localidades A e C.



Desenha a lápis, no mapa, uma construção geométrica rigorosa que te permita obter, de acordo com as condições apresentadas, a localização do hipermercado. Assinala esse local com a letra H.

**Não apagues as linhas auxiliares.**

---

Para a resolução desta questão os alunos teriam de construir a circunferência de centro no ponto que representa a localidade *B* e raio igual a duas unidades de medida da escala correspondente, bem como construir a mediatriz do segmento de reta que une os pontos representantes das localidades *A* e *C*. De acordo com as condições do enunciado, o ponto de interseção destes dois lugares geométricos que se situa dentro da zona limitada pelo traço grosso seria a localização do hipermercado. Para efetuar as construções pretendidas os alunos teriam de utilizar o material de desenho, nomeadamente, o compasso e opcionalmente a régua. Observe-se na tabela seguinte as percentagens de respostas obtidas pelos alunos na questão sete do primeiro teste.

Tabela 11

Percentagem de respostas obtidas na questão 7 do primeiro teste do 2.º período

Questão	Respostas			Não respostas
	Corretas	Parcialmente corretas	Erradas	
7	41,2%	41,2%	17,6%	—

Pela observação da tabela, é possível constatar que toda a turma tentou realizar esta questão e que apenas três alunos não conseguiram realizar nenhum passo para a resolução da mesma. Os alunos que responderam erroneamente a esta questão, estiveram a tentar realizar outro tipo de lugares geométricos, especificamente a bissetriz, o que não lhes era pedido. Mais ainda, as respostas *parcialmente corretas* deveu-se a três situações: ao facto de os alunos não realizarem a segunda ou a terceira condição ou, ainda, por não apresentar como resposta o ponto correspondente à intersecção das duas últimas condições. Veja-se de seguida uma resposta correta apresentada pelo aluno André.

- O hipermercado deve ficar dentro da zona delimitada pelo traço grosso;
- O hipermercado fica a 14 km da localidade B;
- O hipermercado fica a igual distância das localidades A e C.

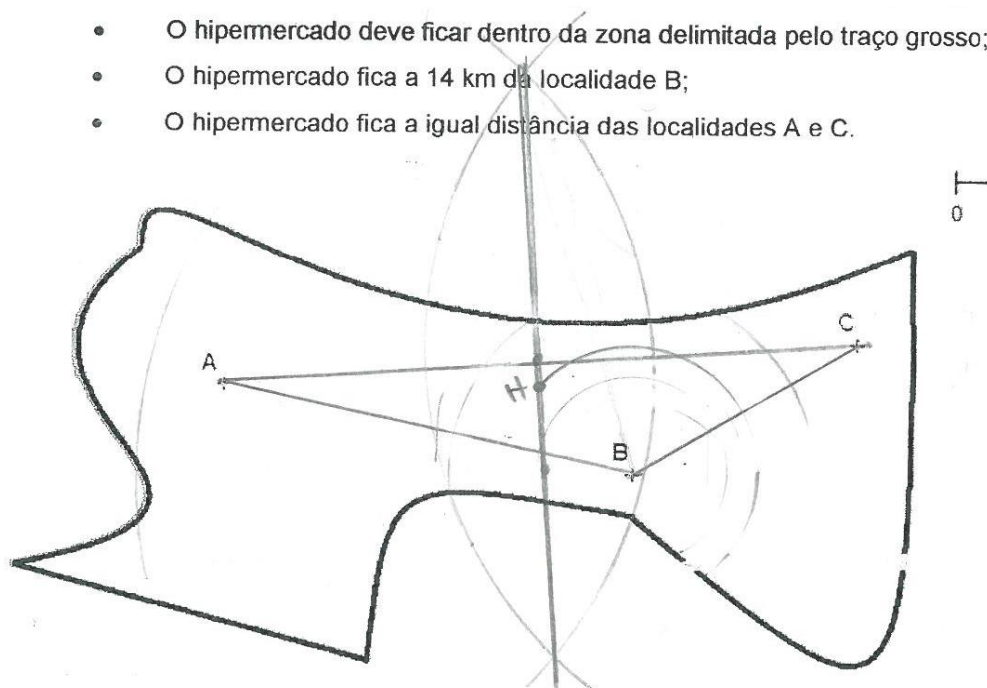


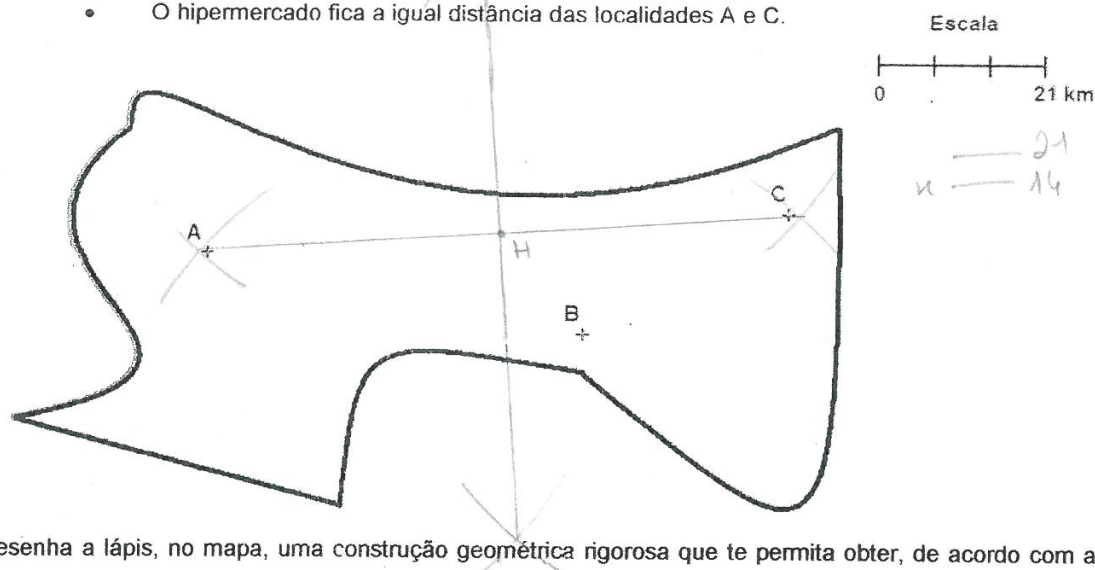
Figura 8. Resolução da questão 7 pelo aluno André.

Verifica-se que o aluno André, embora tenha conseguido resolver a questão, teve dificuldade em realizar a segunda condição do enunciado. Nesta resolução é possível verificar que o aluno idealizou várias circunferências. Neste sentido, pode-se equacionar duas possibilidades, ou o aluno não sabia consultar a escala e esteve a tentar várias hipóteses ou o compasso deste estava desafinado e o aluno teve dificuldade em segurá-lo na posição certa. Nota-se, ainda, na sua construção um grau de rigor limitado, pois a mediatriz apresenta duas

retas que acabam por intersektarem-se. Como o ponto  $H$  é um ponto onde as retas estão sobrepostas, parece não acarretar problemas nem indecisões para o aluno na sua resolução. No entanto, esta foi a única situação de falta de rigor verificada em todas as construções efetuadas pelos alunos nesta questão.

De seguida, apresenta-se a resolução da aluna Adriana que expõe uma resposta parcialmente correta, uma vez que não realizou a construção que satisfaz a segunda condição do enunciado.

- O hipermercado deve ficar dentro da zona delimitada pelo traço grosso;
- O hipermercado fica a 14 km da localidade B;
- O hipermercado fica a igual distância das localidades A e C.



Desenha a lápis, no mapa, uma construção geométrica rigorosa que te permita obter, de acordo com as

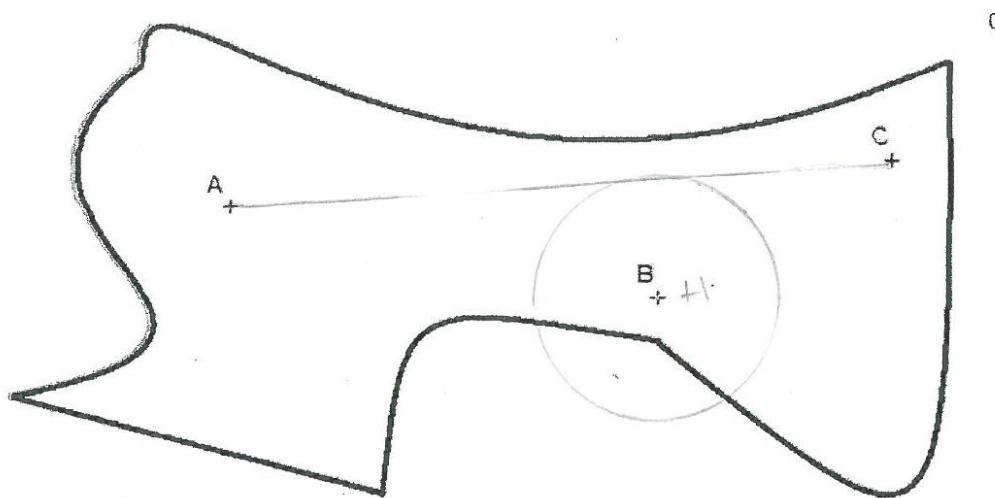
*Figura 9. Resolução da questão 7 pela aluna Adriana.*

Na resolução presente na figura 9 vê-se que a aluna consegue encontrar um conjunto de pontos que estão à mesma distância dos pontos  $A$  e  $C$ . No entanto, a aluna parece considerar um segmento de reta que contém esses pontos e construir a mediatriz desse segmento de reta, que acaba por coincidir e conter o segmento de reta que une os pontos  $A$  e  $C$ . No entanto, a aluna não realiza a segunda condição do enunciado e refere que o ponto  $H$  é o ponto de intersecção desses segmentos de reta.

O facto de os alunos não realizarem a segunda condição do enunciado pode ser explicado pela falta de consciência da essência das construções do compasso. Ou seja, o compasso é o instrumento que serve para desenhar todos os pontos que estão a uma distância fixa, igual à medida do comprimento do raio, de um dado ponto, definido pela fixação do compasso, o centro da circunferência. Assim, para construir o lugar geométrico que satisfaz a

segunda condição os alunos teriam de ter a noção do significado das construções com o compasso.

No entanto, como já foi referido, houve alunos que obtiveram uma resposta parcialmente correta devido a não terem efetuado a construção pretendida na terceira condição, como é o caso da aluna Jade.



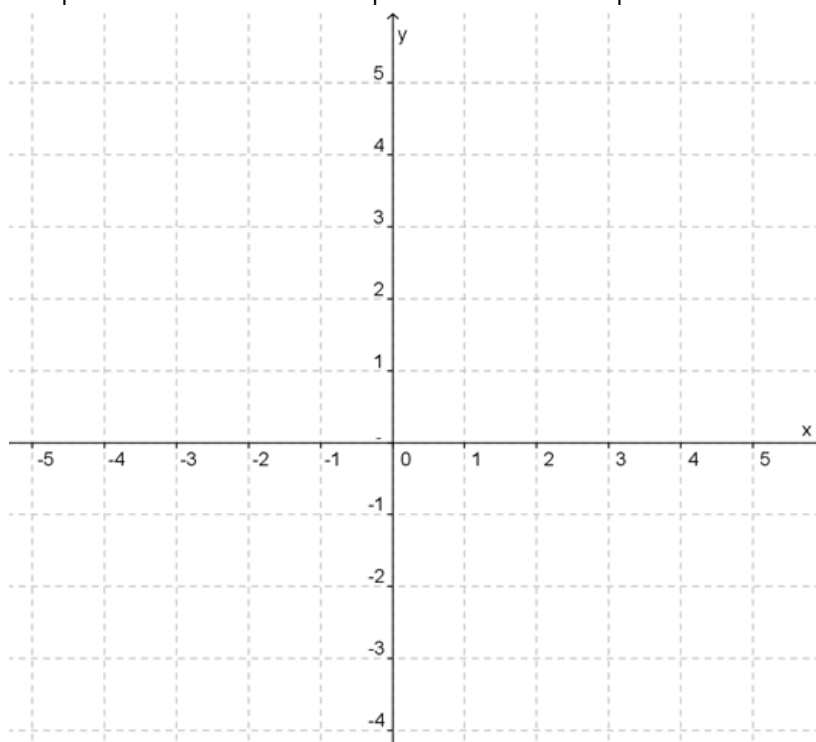
*Figura 10. Resolução da questão 7 pela aluna Jade.*

Por observação da figura 10 verifica-se que a aluna Jade realizou corretamente apenas a construção necessária para dar resposta à segunda condição do enunciado. Esta aluna faz a consulta da escala e desenha o lugar geométrico pretendido corretamente. No entanto, embora trace o segmento de reta que une os pontos representativos das localidades *A* e *C* não desenha a mediatriz desse segmento de reta. Assim, pode-se equacionar duas possibilidades para a ocorrência desta situação: a aluna não sabia qual o lugar geométrico que representa pontos que estão à mesma distância de dois pontos dados, ou a aluna soube identificar o lugar geométrico mas com o material que disponha não sabe construir.

De seguida, apresenta-se a questão 6 da segunda ficha de avaliação do 2.º Período.

Representa no referencial cartesiano que se segue, o conjunto dos pontos do plano que verificam **simultaneamente** as seguintes condições:

- os pontos estão a mais do que uma unidade do ponto  $A(1,1)$  e
- os pontos estão a menos do que três unidades do ponto  $A$ .



Esta questão pressupõe uma construção geométrica em que o único material manipulável necessário para a sua construção é o compasso. Nesta construção os alunos terão de construir uma coroa circular limitada pelas circunferências de centro em  $A$  e raios de uma e três unidades, respetivamente, excluindo os pontos das circunferências.

Tome-se, agora, nota da percentagem de respostas e não respostas dadas pelos alunos da turma.

Tabela 12

*Percentagem de respostas obtidas na questão 6 do segundo teste do 2.º período*

Questão	Respostas			Não respostas
	Corretas	Parcialmente corretas	Erradas	
6	18,8%	37,5%	12,5%	31,2%

Da observação da tabela 12, verifica-se que 69% da turma tentou resolver esta questão. No entanto, apenas 18,8% apresenta uma resposta correta. Note-se, ainda, que cerca de metade da turma obteve alguma cotação nesta questão, sendo que 37,5% dos alunos apresenta uma resposta incompleta. Assim, é possível notar-se que a turma apresentou muita dificuldade em

construir o lugar geométrico, como se verifica na tabela seguinte, onde se apresentam os erros e dificuldades cometidas pelos oito alunos que não obtiveram a totalidade da cotação nesta questão.

Tabela 13

*Erros/dificuldades cometidas pelos alunos ao construir a coroa circular da questão 7*

Tipos de erros/dificuldades	Porcentagem
Pontos da fronteira	100%
Pontos interiores	12,5%
Construção de uma circunferência	37,5%
Confusão com as unidades do referencial	25%
Centro da circunferência	12,5%
Tradução à letra do enunciado	12,5%

Ao observar a tabela 13, verifica-se alguma diversidade de erros que os alunos cometeram ao construir a coroa circular da questão 7, destacando-se a falta de exclusão dos pontos da fronteira por todos os oito alunos. Vejamos, então, as resoluções de quatro alunos a esta questão onde são evidentes as situações acima referidas.

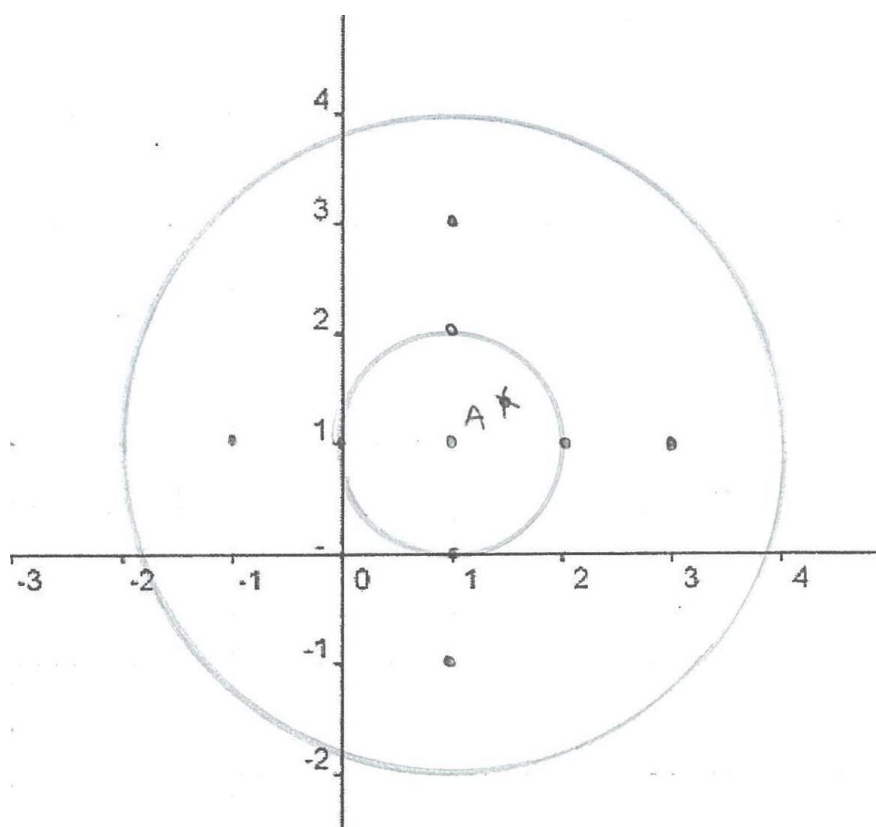


Figura 11. Resolução do aluno André à questão 6.



Na resposta do aluno André, verifica-se que ele não exclui os *pontos da fronteira*, pois marca as duas circunferências corretamente, mas com um traço contínuo, pelo que, não exclui os pontos das circunferências da resposta. Este aluno tem ainda dificuldade em identificar os *pontos interiores* como os pontos que satisfazem as condições do enunciado, pois este assinala quatro pontos em condições favoráveis, mas exclui infinitos pontos ao não preencher o interior da coroa circular desenhada. Assim, este aluno apresenta dois erros/dificuldades sentidas por alguns alunos.

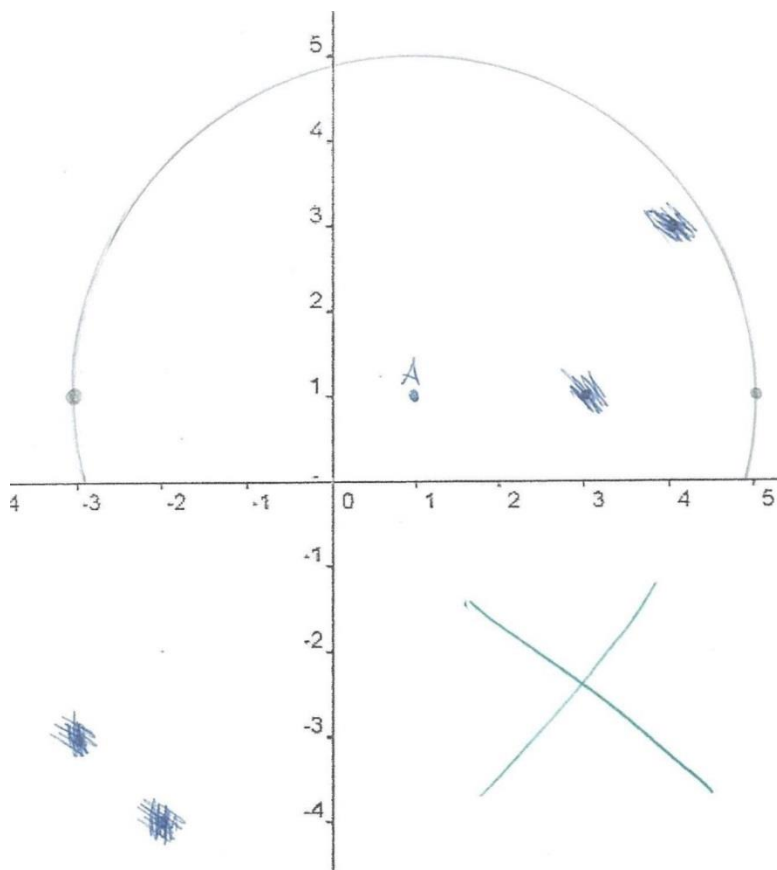


Figura 12. Resolução da aluna Carla à questão 6.

A aluna Carla não interpreta bem o enunciado, pois, por um lado, só constrói um arco de circunferência no semieixo positivo  $O_y$ , e, por outro, não é a circunferência que lhe delimita o conjunto de pontos pretendidos. Note-se que parece que a aluna andou a testar se alguns pontos, considerados por ela, satisfazem o enunciado, mas não conseguiu concluir o raciocínio, acabando por riscar esses mesmos pontos.

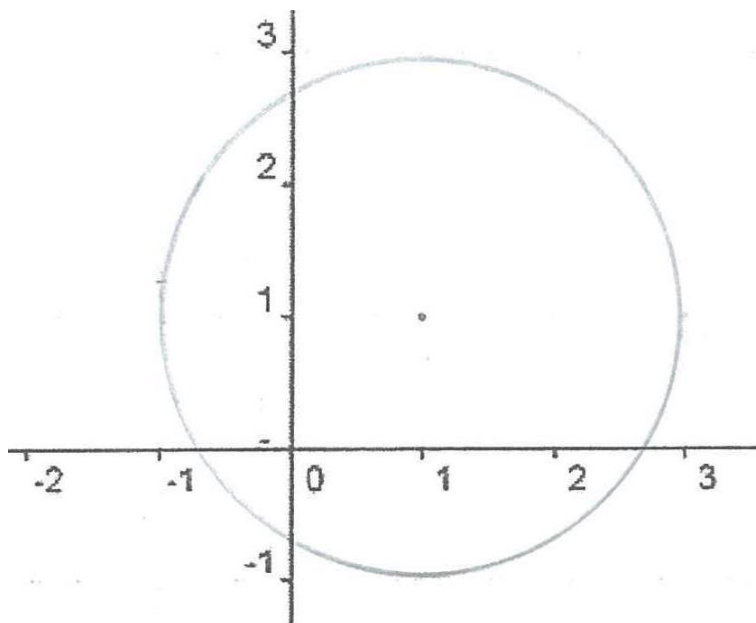


Figura 13. Resolução da aluna Jade à questão 6.

Já a aluna Jade, além de só construir *uma circunferência*, também se confunde quando o enunciado refere que *os pontos estão a menos do que três unidades do ponto A* com as três unidades dos eixos. Assim, a aluna apresenta uma circunferência de centro em *A* e raio de 2 unidades.

Por último, apresenta-se a resposta da aluna Célia que expõe duas situações de resolução diferentes, sendo esta a única aluna a apresentar uma delas.

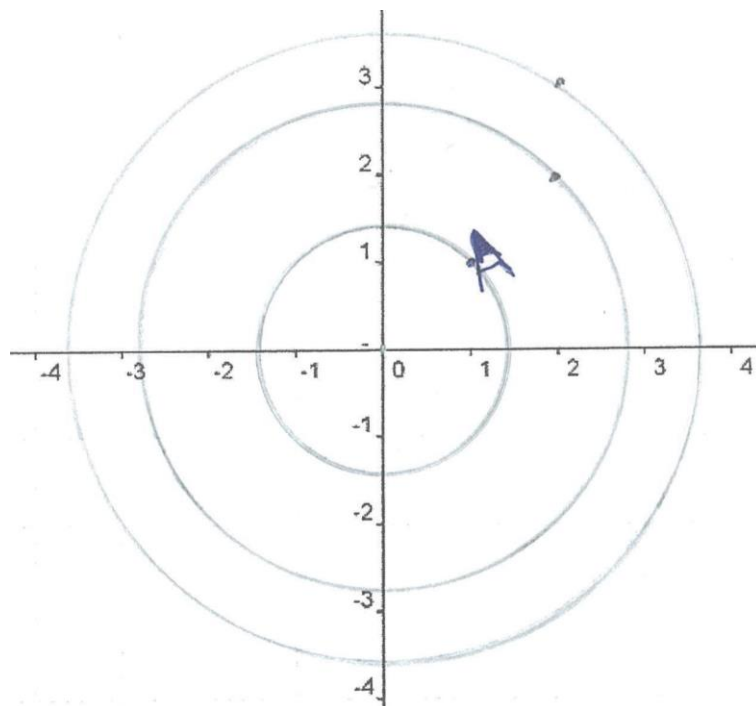


Figura 14. Resolução da aluna Célia à questão 6.

Embora a aluna identifique corretamente o ponto *A*, esta não considera este ponto como sendo o *centro das circunferências* que constrói. Pode-se ver, ainda, que a aluna *traduz o enunciado à letra* quando considera uma circunferência com raio de mais do que uma unidade e outra com menos do que três unidades. Assim, caso a aluna tivesse considerado o centro certo, esta representaria um conjunto de pontos que satisfaz o enunciado, mas não representou a totalidade dos pontos.

### 3.5. Percepções dos alunos sobre o uso de materiais manipuláveis na intervenção de ensino.

Nesta secção apresentam-se as percepções dos alunos relativamente ao uso dos diferentes materiais manipuláveis utilizados durante esta intervenção de ensino. Serão também apresentadas as opiniões dos alunos sobre a importância do trabalho de grupo como forma de promover a aprendizagem com recurso aos materiais manipuláveis utilizados. Para avaliar estas percepções, foi aplicado um questionário (anexo III) e os resultados serão mostrados e analisados de seguida. Para uma análise detalhada, os resultados serão tratados segundo o género dos alunos e segundo o desempenho destes na disciplina de Matemática. Para o nível de desempenho, consideram-se três níveis *Fraco*, *Suficiente* e *Bom*. Para tal, foi considerada a média das notas dos três períodos de cada aluno, sendo o nível *Fraco* os alunos cuja média é inferior ou igual a dois valores, o nível *Suficiente* os alunos que obtiveram três valores e nível *Bom* os alunos que obtiveram média acima de três valores. Ainda nesta análise atribuiu-se ao *Discordo Totalmente* (DT), *Discordo Parcialmente* (DP), *Concordo Parcialmente* (CP) e *Concordo Totalmente* (CT) uma escala de 1 a 4 respetivamente.

**Percepções dos alunos sobre Geometria.** A tabela 14, apresentada em baixo, explicita as respostas dadas pelos alunos às questões que abordavam o tema Geometria.

Tabela 14

*Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas ao tema Geometria*

Aprendizagem de Geometria	DT/DP	CP/CT
Gosto de geometria.	16,7	83,3
Aprender geometria é muito importante para a minha formação.	38,9	61,1
A geometria ajuda a compreender o mundo onde vivemos.	38,9	61,1
A geometria é difícil de aprender.	66,7	33,3
Quando estudo geometria posso investigar, experimentar e explorar relações.	33,3	66,7

Da análise da tabela 14, verifica-se que a maioria dos alunos (83,3%) gosta de Geometria. Repare-se, ainda, que mais de metade da turma (61,1%) considera que aprender Geometria é importante na sua formação e que ajuda a compreender o mundo onde vive. Quanto à aprendizagem, também mais de metade da turma (66,7%) revela que aprender Geometria não é difícil e que o seu estudo permite-lhes investigar, experimentar e explorar relações.

Relativamente à análise por género e por desempenho, pelo quadro 3, observam-se algumas diferenças entre as perceções dos rapazes e das raparigas e dos alunos com melhor ou pior desempenho a Matemática.

### Quadro 3

#### *Análise por género e por desempenho das perceções dos alunos sobre Geometria*

Aprendizagem de Geometria	Género				Desempenho					
	Feminino		Masculino		Fraco		Suficiente		Bom	
	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$
Gosto de geometria.	3,0	0,85	3,1	0,64	3	0,77	3,1	0,82	4	0,50
Aprender geometria é muito importante para a minha formação.	2,2	0,83	2,7	0,70	2,5	0,67	2,1	1,00	3	0
A geometria ajuda a compreender o mundo onde vivemos.	2,6	0,48	2,6	0,90	2,7	0,46	2,5	0,96	3	0,50
A geometria é difícil de aprender.	2,4	0,88	2,1	0,35	2,4	0,80	2,2	0,47	2	0,50
Quando estudo geometria posso investigar, experimentar e explorar relações.	2,6	0,77	2,7	0,45	2,9	0,54	2,3	0,69	3	0

**Nota:** Nesta análise atribuiu-se ao *Discordo Totalmente*, *Discordo Parcialmente*, *Concordo Parcialmente* e *Concordo Totalmente* uma escala de 1 a 4, respetivamente.

Em geral, verifica-se no quadro 3, que tanto os rapazes como as raparigas gostam de Geometria e, além disso, concordam que esta ajuda a compreender o mundo e que o seu estudo permite fazer investigações, experimentar e explorar relações. No entanto, em média, os rapazes reconhecem maior importância em aprender Geometria nas suas formações e, ao mesmo tempo, consideram a sua aprendizagem relativamente fácil. Os alunos mais capazes, em média, demonstram gostar mais de Geometria, atribuem maior importância ao estudo desta área da Matemática e à importância desta para a compreensão do mundo. Note-se, ainda, que os alunos com melhor nível de desempenho são os que consideram a Geometria de fácil aprendizagem.

**Percepções dos alunos sobre a utilização dos materiais de medida e desenho na aprendizagem de Geometria.** Ao longo da intervenção de ensino, os alunos tiveram a oportunidade de fazer manipulações com os materiais de medida e desenho, nomeadamente, com a régua, compasso, esquadro e transferidor. Deste modo, foi importante averiguar as percepções dos alunos, antes e depois da intervenção, relativamente ao à vontade destes em manipular estes materiais, o que pode ser observado na tabela 15.

Tabela 15

*Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à dificuldade que sentiram em manipular os materiais de medida e desenho*

Material de medida e desenho.	Antes da intervenção		Depois da intervenção	
	DT/DP	CP/CT	DT/DP	CP/CT
Régua	88,9	11,1	100	0
Compasso	77,8	22,2	94,4	5,6
Esquadro	83,3	16,7	94,4	5,6
Transferidor	77,8	22,2	100	0

**Nota:** DT/DP – *Discordo Totalmente* ou *Discordo Parcialmente*; CP/CT – *Concordo Parcialmente* ou *Concordo Totalmente*.

Em geral, verifica-se pela tabela 15 que antes da intervenção ainda havia alguns alunos com dificuldades em manipular os diversos instrumentos de medida e desenho. Os materiais que, antes da intervenção, os alunos revelam ter mais dificuldade em manipular são o transferidor e o compasso. No entanto, depois da intervenção, 100% dos alunos consideram não ter dificuldades em manipular a régua e o transferidor e 94,4% não sente dificuldades em manipular o compasso e o esquadro.

Quadro 4

*Análise por género e por desempenho das percepções dos alunos sobre a dificuldade em manipular os materiais de medida e desenho antes e depois da intervenção*

Material de medida e desenho.		Género				Desempenho					
		Feminino		Masculino		Fraco		Suficiente		Bom	
		$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$
Régua	Antes da intervenção	1,5	0,66	1,9	0,99	1,4	0,66	1,9	1,00	2	0,50
	Depois da intervenção	1,2	0,39	1,3	0,45	1,2	0,40	1,3	0,47	1	0
Compasso	Antes da intervenção	1,5	0,78	2,1	0,99	1,5	0,81	2	1	2	1
	Depois da intervenção	1,2	0,39	1,7	0,70	1,2	0,40	1,6	0,75	2	0,50
Esquadro	Antes da intervenção	1,7	0,75	1,6	0,73	1,5	0,67	1,9	0,69	2	1
	Depois da intervenção	1,2	0,39	1,7	0,70	1,2	0,40	1,6	0,75	2	0,50
Transferidor	Antes da intervenção	1,8	0,83	1,9	0,64	1,6	0,80	2,1	0,37	2	1
	Depois da intervenção	1,2	0,39	1,4	0,49	1,2	0,40	1,4	0,47	2	0,50

**Nota:** Nesta análise atribuiu-se ao *Discordo Totalmente*, *Discordo Parcialmente*, *Concordo Parcialmente* e *Concordo Totalmente* uma escala de 1 a 4, respetivamente.

No que diz respeito aos materiais de medida e desenho, na análise por género, verifica-se no quadro 4, que as raparigas, em média, mostram ter menos dificuldade na manipulação da régua, compasso e transferidor, antes e depois da intervenção. No que concerne ao esquadro, antes da intervenção, em média, as raparigas referem ter mais dificuldade na sua manipulação do que os rapazes, enquanto que, no final da intervenção, estas já referem apresentar menos dificuldade. Ainda antes da intervenção, o material que as raparigas apresentam mais dificuldade em manipular é o transferidor e os rapazes revelam ser o compasso. No final da intervenção as raparigas revelam-se mais capazes em manipular qualquer um dos materiais de desenho e medida do que os rapazes.

Da análise por desempenho, denota-se que, no início da intervenção, os alunos com melhor desempenho, em média, consideram ter mais dificuldade na manipulação dos materiais de desenho e medida que os alunos com desempenho mais fraco. O mesmo sucede depois da

intervenção de ensino, pois os alunos com melhor desempenho continuam a referir que têm mais dificuldade em manipular os materiais, à exceção da régua e do transferidor, que são os alunos com um desempenho suficiente que revelam maior dificuldade em manipulá-los.

De seguida, tentou-se perceber a opinião dos alunos no sentido de averiguar se as tarefas colocadas nas aulas interferiram na aprendizagem e destreza de manipulação destes materiais, tal como se observa na tabela 16.

Tabela 16

*Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à aprendizagem com os materiais de medida e desenho*

Aprendizagem com materiais de medida e desenho	DT/DP	CP/CT
As tarefas que fiz nas aulas obrigaram-me a trabalhar com a régua, o compasso, o esquadro e o transferidor.	5,6	94,4
As tarefas que realizei nas aulas permitiram-me ganhar destreza na manipulação da régua, do compasso, do esquadro e do transferidor.	5,6	94,4

**Nota:** DT/DP – *Discordo Totalmente* ou *Discordo Parcialmente*; CP/CT – *Concordo Parcialmente* ou *Concordo Totalmente*.

Relativamente às tarefas realizadas em sala de aula, apenas um aluno considera que não o obrigaram a trabalhar com o material de medida e desenho e outro aluno considera que as tarefas realizadas em aula não foram suficientes para ganhar destreza na manipulação dos materiais de medida e desenho. É ainda importante referir que estes alunos são os dois alunos que pertencem ao ensino especial.

Na pergunta de resposta aberta número 28, os alunos mencionaram as suas opiniões sobre a importância de saber manipular os materiais de medida e desenho. Mais de metade da turma (55,6%) refere que é importante e apresentam como justificação o facto de ser necessário para a profissão que pensam exercer no futuro, pelo facto de ser necessário nos estudos futuros ou, até, pelo facto de o saber não ocupar lugar, como mostra a figura 15. Alguns alunos (33,3%) referem que o saber manipular estes materiais só lhes será importante se mais tarde exercerem uma profissão que faça uso destes instrumentos, apresentando como exemplo a situação de ser professor, como mostra a resposta do aluno Paulo expresso na figura 16.

*Sim, porque um dia podemos precisar destes materiais para algum trabalho, e não perdemos nada em aprender mais.*

*Figura 15. Resposta apresentada pela aluna Adriana à questão 28 do questionário.*

É Sim, para quem quiser ser engenheiro ou professor de matemática.

Figura 16. Resposta apresentada pelo aluno Paulo à questão 28 do questionário.

Não, pois o curso que pretendo seguir não envolve geometria nem matemática.

Figura 17. Resposta apresentada pela aluna Elsa à questão 28 do questionário.

Ainda, 16,7% dos alunos refere explicitamente que não é importante saber manipular os materiais de medida e desenho porque no futuro que projetam para eles próprios não precisam desses materiais, como se pode ver na resposta da figura 17.

**Percepções dos alunos sobre a utilização do Mira na aprendizagem de Geometria.** O Mira foi um dos materiais manipuláveis com que os alunos também trabalharam nas aulas de Geometria, como foi mostrado no subcapítulo 3.1. Relativamente ao uso do Mira no processo de ensino e aprendizagem, os alunos (94,4%), tal como mostra a tabela 17, evidenciam que gostaram e que foi importante a sua utilização na aprendizagem dos conceitos introduzidos com este material.

Tabela 17

*Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à aprendizagem com o Mira*

Aprendizagem com o Mira	DT/DP	CP/CT
O MIRA foi importante para a aprendizagem dos conceitos de mediatriz e de bissetriz.	5,6	94,4
Gostei das aulas em que foi utilizado o MIRA.	5,6	94,4
No início tive muitas dificuldades em manipular o MIRA.	50	50
Continuo a ter dificuldades em trabalhar com o MIRA.	77,8	22,2

**Nota:** DT/DP – *Discordo Totalmente* ou *Discordo Parcialmente*; CP/CT – *Concordo Parcialmente* ou *Concordo Totalmente*.

Pela análise da tabela 17, é possível constatar que metade da turma menciona que no início da intervenção apresentava muitas dificuldades em manipular o Mira. No entanto, depois da intervenção, 22,2% da turma ainda continua a apresentar dificuldades.



Quadro 5

*Análise por género e por desempenho das percepções dos alunos sobre a utilização do Mira no processo de ensino e aprendizagem*

Questão	Género				Desempenho					
	Feminino		Masculino		Fraco		Suficiente		Bom	
	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$
O MIRA foi importante para a aprendizagem dos conceitos de mediatriz e de bissetriz.	3,4	0,48	3,0	0,53	3,2	0,40	3,3	0,75	3	0
Gostei das aulas em que foi utilizado o MIRA.	3,4	0,48	3,1	0,64	3,3	0,64	3,3	0,47	3	0
No início tive muitas dificuldades em manipular o MIRA.	2,5	0,89	2,0	0,93	2,6	0,66	2,0	1,07	1	0
Continuo a ter dificuldades em trabalhar com o MIRA.	1,8	0,83	1,7	0,70	1,9	0,70	1,6	0,76	2	1

**Nota:** Nesta análise atribuiu-se ao *Discordo Totalmente*, *Discordo Parcialmente*, *Concordo Parcialmente* e *Concordo Totalmente* uma escala de 1 a 4, respetivamente.

Pela análise do quadro 5, verifica-se que tanto os rapazes como as raparigas, de qualquer nível de desempenho, consideram ser importante a utilização do Mira na aprendizagem dos conceitos estudados e que gostaram dessas aulas. As raparigas, em média, registam mais dificuldade em manipular o mira ( $\tilde{x} = 2,5$ ) no início da intervenção. Relativamente ao desempenho, em média, os alunos com melhor desempenho, no início da intervenção, sentiram menos dificuldades em manipular o Mira.

**Percepções dos alunos sobre a utilização do papel e recortes na aprendizagem de Geometria.** A manipulação de papel através de recortes e montagens foi uma das estratégias de ensino e aprendizagem a que recorri nesta intervenção.

Tabela 18

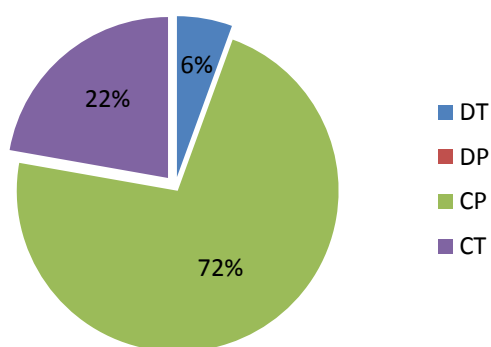
*Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à aprendizagem com recortes e montagem de papel*

Aprendizagem com o Mira	DT/DP	CP/CT
Gostei de explorar situações de geometria com recurso a recortes e montagens de papel.	0	100
A utilização de recortes e montagens de papel foram importantes na compreensão dos conceitos envolvidos.	5,6	94,4
Gostava de fazer mais atividades com recurso a recortes e montagens de papel.	5,6	94,4

**Nota:** DT/DP – *Discordo Totalmente* ou *Discordo Parcialmente*; CP/CT – *Concordo Parcialmente* ou *Concordo Totalmente*.

Deste modo, a tabela 18, em baixo, mostra que toda a turma gostou de realizar esta atividade, e que, 94,4% da turma considera que a atividade foi importante para a aprendizagem e que gostavam de realizar mais atividades com este tipo de material. Note-se, ainda, que 38,9% da turma referiu que concordava totalmente com a realização de mais atividades com este material. Assim, esta atividade recebeu dos alunos uma apreciação bastante positiva.

**Perceções dos alunos sobre a intervenção de ensino com materiais manipuláveis.** Na figura 18, em baixo, apresenta-se as respostas dos alunos à questão 6 do questionário relativa à motivação dos alunos para aprender matemática com recurso a materiais manipuláveis.



*Figura 18.* Percentagem de alunos segundo as opções de resposta relativas à aprendizagem com materiais manipuláveis.

Em geral, observa-se pela figura 18, que a maioria dos alunos (94%) afirmou sentir-se mais motivado na aprendizagem de Matemática quando utiliza materiais diversificados e apenas um aluno não se sente nada motivado. Veja-se as perceções dos alunos segundo o género e o nível de desempenho.

#### Quadro 6

*Análise por género e por desempenho das perceções dos alunos sobre aprendizagem com materiais manipuláveis.*

Questão	Género				Desempenho					
	Feminino		Masculino		Fraco		Suficiente		Bom	
	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$	$\tilde{x}$	$s$
Sinto-me mais motivado para aprender matemática quando uso materiais diversificados.	3,2	0,39	3,0	0,93	3,1	0,30	3,1	1,00	4	0,50

**Nota:** Nesta análise atribuiu-se ao *Discordo Totalmente*, *Discordo Parcialmente*, *Concordo Parcialmente* e *Concordo Totalmente* uma escala de 1 a 4, respetivamente.

No que diz respeito à utilização de diferentes materiais, na análise por gênero, verifica-se no quadro 6 que, em média, tanto os rapazes como as raparigas se sentem mais motivados em aprender matemática quando se introduz materiais no processo de ensino e aprendizagem. Da análise por desempenho, denota-se que os alunos com desempenho bom, em média, valorizam mais a aprendizagem com a utilização de diferentes materiais ( $\tilde{x} = 4$ ) do que os alunos com desempenho fraco ( $\tilde{x} = 3,1$ ) ou suficiente ( $\tilde{x} = 3,1$ ).

Nas questões de resposta aberta, os alunos mencionaram vantagens e desvantagens da utilização de diferentes materiais no processo de ensino e aprendizagem, que podem observar-se na tabela 19.

Tabela 19

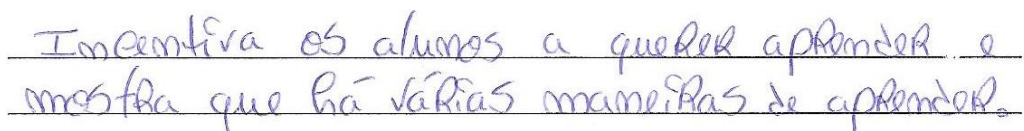
*Vantagens e desvantagens consideradas pelos alunos na intervenção de ensino com materiais manipuláveis*

<b>Vantagens</b>	<b>Percentagem de alunos</b>
Incentiva/motiva a aprendizagem	50
Melhorar as aprendizagens	38,9
Diversificar as estratégias de aprendizagem	5,6
Diminuir o grau de dificuldade	27,8
Aprender a fazer manipulações	5,6
Atividade prática	5,6
Maior grau de precisão	5,6
<b>Desvantagens</b>	
Distração dos alunos	27,8
Esquecimento do material	50
Dispensa de mais tempo nas atividades	5,6
Acidentes	5,6

Analisando a tabela 19, é possível constatar que os alunos reconhecem mais vantagens do que desvantagens na utilização de materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem.

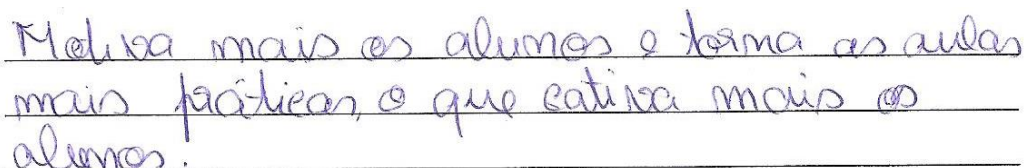
O fator incentivador e/ou motivador das atividades em sala de aula, com recurso a diferentes materiais foi a vantagem mais referida pelos alunos (50% das respostas). Os alunos reconhecem, ainda, como vantagem a possibilidade do uso de diferentes materiais possibilitar

uma melhor aprendizagem dos conceitos e diminuir o grau de dificuldade das atividades. A título de exemplo das respostas dadas, veja-se o que as alunas Carla e Elsa respondem a esta questão.



Incentiva os alunos a querer aprender e mostra que há várias maneiras de aprender.

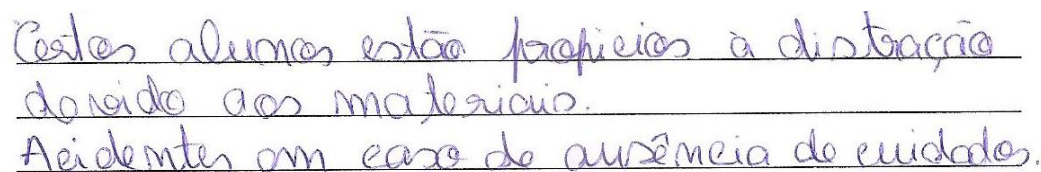
Figura 19. Resposta apresentada pela aluna Carla à questão 24 do questionário.



Melhora mais os alunos e torna as aulas mais práticas, o que cativa mais os alunos.

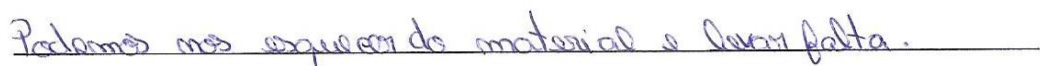
Figura 20. Resposta apresentada pela aluna Elsa à questão 24 do questionário.

Em geral, pode-se observar pela tabela 19 que metade da turma refere como desvantagem da utilização de materiais na sala de aula o facto de se poderem esquecer deles. Referem, inclusive, que por esse motivo podem levar falta de material, sendo este um reforço negativo nas suas aprendizagens. Outra desvantagem reconhecida pelos alunos (27,8%) é o facto de a manipulação do material proporcionar mais distração nos alunos. Veja-se as respostas dadas pelas alunas Elsa e Sónia quanto às desvantagens da utilização dos materiais.



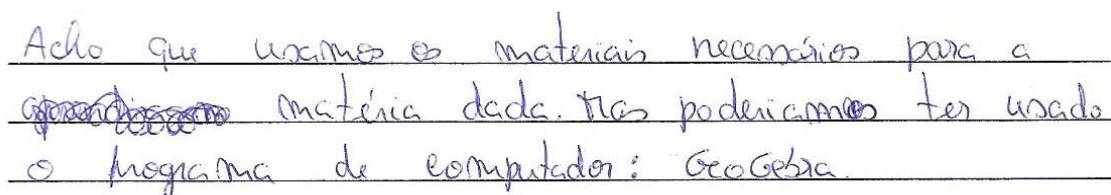
Estes alunos estão propensos a distração devido aos materiais.  
Acidentes em caso de ausência de cuidados.

Figura 21. Resposta apresentada pela aluna Elsa à questão 25 do questionário.



Podemos nos esquecer do material e levar falta.

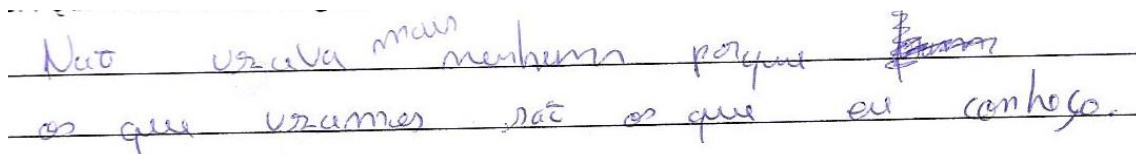
Figura 22. Resposta apresentada pela aluna Sónia à questão 25 do questionário.



Acho que usamos os materiais necessários para a ~~aprendizagem~~ matéria dada. Mas poderíamos ter usado o programa de computador: GeoGebra.

Figura 23. Resposta apresentada pela aluna Adriana à questão 27 do questionário.

Quando questionados sobre que outros materiais gostariam de utilizar no processo de ensino e aprendizagem da geometria, dois alunos responderam o computador, incluindo o *software* geogebra, como se pode ver na figura 23. A restante turma, especificamente sete alunos, referiu que foram utilizados os necessários, que não se lembram ou não conhecem mais materiais que possam ser utilizados, como mostra a figura 24.



Não usava mais nenhum porque ~~foram~~  
os que usamos são os que eu conheço.

Figura 24. Resposta apresentada pelo aluno Dinis à questão 27 do questionário.

Assim, quer seja pelo facto de não conhecerem ou de não se lembrarem de mais materiais que podem ser usados em atividades de sala de aula, os alunos não expressaram opiniões no sentido de experimentarem outros materiais além dos que foram utilizados nesta intervenção.

**Perceções dos alunos sobre o trabalho de grupo na aprendizagem de Geometria.** O trabalho de grupo foi uma das estratégias de ensino e aprendizagem com grande ênfase neste projeto. Deste modo, foi importante averiguar as perceções dos alunos relativamente a esta forma de trabalho em Geometria aliada à utilização dos materiais manipuláveis. Numa pergunta de resposta aberta, 83% dos alunos considera importante o trabalho de grupo e expressam os aspetos que mais prevaleceram em relação ao funcionamento do seu grupo. Na tabela 20 é possível ver as opiniões registadas pelos alunos.

Tabela 20

*Papel desempenhado pelos elementos do grupo considerado pelos alunos na intervenção de ensino e aprendizagem.*

Papel dos elementos do grupo	Percentagem de alunos
Nenhuma ajuda	11,1
Partilha de conhecimentos	5,6
Compreensão e resolução das tarefas	50
Entreajuda e superação de dificuldades	27,8
Manipular os materiais	16,7

Verifica-se, na tabela 20, que o papel dos elementos do grupo mais relevante e considerado por metade dos alunos é a ajuda na compreensão e resolução das tarefas em sala de aula. Consideram, ainda, que o trabalho de grupo é importante, na medida em que existe entreajuda entre os elementos do grupo, contribuindo para a superação das dificuldades, quer nas tarefas quer na manipulação dos materiais em sala de aula.

## Capítulo IV

### CONCLUSÃO

Este capítulo organiza-se em três secções. Na primeira secção são apresentadas e discutidas algumas conclusões decorrentes da análise dos dados, em que se procura dar resposta às questões deste estudo. Na segunda secção, são apresentadas algumas implicações no ensino e aprendizagem da Matemática. Por fim, na terceira secção, sugere-se um conjunto de recomendações que poderão ser tomadas em linha de conta em futuras investigações congêneres e discutem-se as limitações relativas ao projeto desenvolvido.

#### 4.1. Conclusões

Neste subcapítulo apresentam-se os principais resultados obtidos no estudo, tendo por referência cada uma das questões estabelecidas. Ao mesmo tempo, discutem-se estes resultados tendo em conta os estudos referidos no enquadramento contextual e teórico.

##### 4.1.1. – Como utilizam os alunos do 9.º ano os materiais manipuláveis na aprendizagem de Geometria?

As atuais orientações curriculares defendem que, em sala de aula, os alunos devem trabalhar e desenvolver diversas competências, como explorar, investigar propriedades e relações geométricas, conjecturar e validar, raciocinar logicamente, resolver problemas, comunicar matematicamente, construir e compreender conceitos e pequenas demonstrações, sendo os materiais manipuláveis fortes incentivadores para a aquisição destas competências. Não se quer com isto dizer que o processo de ensino e aprendizagem deva ser exclusivamente com o uso de materiais manipuláveis, pelo contrário, deve ser racionalizado de acordo com as crenças do professor. Quando se apresenta uma atividade com recurso aos materiais manipuláveis deve-se estar ciente que a aula não será completamente controlada pelo professor e, como tal, este deve estar atento à forma como os alunos os utilizam, para poder encorajar os alunos a prosseguir ou abandonar determinado raciocínio.

Nas tarefas em que não era dito explicitamente o material manipulável que os alunos teriam de usar, estes revelavam algumas dúvidas e iam testando possibilidades. Por exemplo, na atividade *O jogo Angry Birds*, alguns alunos começaram por tentar encontrar um ponto *N* equidistante a três pontos dados fazendo medições com a régua. No entanto, conforme foram testando, foram percebendo que, dessa forma, não seria fácil resolver o problema e pensaram,

impulsionados por questões colocadas pela professora, em novas estratégias. Assim, os alunos mobilizaram os seus conhecimentos prévios e testaram as suas estratégias, chegando às conjecturas pretendidas. Mais ainda, na tarefa *Ângulos congruentes*, por exemplo, embora os alunos não mostrassem dúvidas que, para construir um ângulo com determinada amplitude, teriam de utilizar o transferidor, já apresentaram dúvidas quanto à sua manipulação. Já na tarefa *Triângulo SOL*, embora já tivessem aprendido, em anos de escolaridade anteriores, a construir triângulos cuja medida do comprimento de dois ou três lados já fosse dada, estes não se lembravam como se fazia a construção. Nesse sentido, os alunos começaram a elaborar estratégias e a testar várias possibilidades para poder construir. Assim, as construções no papel, utilizando o material de desenho e medida, é uma atividade fundamental para assimilar os conceitos, já que, com estes instrumentos as construções geométricas são efetuadas passo a passo, sem saltar etapas e colocando os alunos a trabalhar a teoria utilizada na realização de cada procedimento, como Rossini (2010) também constatou no seu estudo. Neste sentido, as atividades com recurso aos materiais manipuláveis pressupõe uma manipulação associada ao raciocínio para que o seu uso faça sentido. Portanto, o facto de utilizarem os materiais de desenho e medida em várias tarefas de investigação e exploração parece ter contribuído para um maior à vontade no seu manuseamento, ideia corroborada por Velosa (2008).

Na tarefa número 1, como já foi referido, os alunos começaram por estranhar o Mira e demonstraram muitas dificuldades em manipulá-lo, o que propiciou noções superficiais, ideias incompletas e percepções vagas ou até erróneas e muitas das noções e ideias só foram esclarecidas aquando da discussão grupo-turma. Lorenzato (2008) chama a atenção do professor para este tipo de situações que podem ocorrer nas atividades com os materiais manipuláveis e que, quando não são detetados, podem ser prejudiciais na aprendizagem dos alunos. Esta situação verificou-se nas tarefas *A mediatriz com o Mira* e *A bissetriz*, onde os alunos não apresentaram uma justificação para o facto dos pontos que desenharam não serem os únicos pontos nas condições pedidas: serem pontos equidistantes do ponto *A* e do ponto *B* ou das semirretas  $\overrightarrow{BA}$  e  $\overrightarrow{BC}$ , respetivamente. Nesta situação, podemos observar que as construções realizadas pelos alunos, por si só, já exerciam um papel de prova, pois os alunos satisfazem-se com o facto de terem construído uma reta que, por sua vez, já contém infinitos pontos, o que também é constatado no estudo de Oliveira (2009).

A tarefa com recurso a papel e recortes foi a que obteve mais sucesso junto dos alunos. Inicialmente alguns alunos ofereciam alguma resistência à realização dos recortes, por acharem



que era uma perda de tempo. Nesta tarefa, os alunos analisaram a tabela com os dados recolhidos da atividade de recortes, procuraram regularidades e discutiram a possível relação existente entre o número de triângulos em que um polígono fica decomposto, o número de lados de um polígono e a soma dos ângulos internos desse polígono. A visualização dos elementos de cada polígono permitiu a formulação de uma conjectura. Os alunos validaram-na, utilizando os materiais, mas fizeram-na através da manipulação, verificando se as regularidades encontradas se mantinham. Note-se que os alunos validaram a conjectura com base num número reduzido de exemplos, o que está em conformidade com o que refere Velosa (2008). De facto, neste tipo de atividades, os métodos são tão singulares e os resultados tão facilmente alcançáveis que os alunos facilmente sentem entusiasmo, o que também foi referido por Row's (1917).

Devido a tratar-se de uma turma muito dependente dos professores, como foi caracterizada no conselho de turma, durante as diversas actividades, observam-se muitos momentos em que os alunos começam por expor os seus raciocínios, mas com a intenção evidente de obter um *feedback* da professora sobre o que estão a fazer ou para confirmar a solução a que chegam da tarefa.

Em suma, pode inferir-se que os alunos mobilizaram estratégias de resolução e conhecimentos prévios para a resolução das atividades propostas. O trabalho realizado com os materiais manipuláveis facilitou a construção do conhecimento geométrico e permitiu-lhes refletir sobre as suas ações ao mobilizarem processos matemáticos como processos operacionais, de comunicação, de raciocínio, de seleção de estratégias, procura de regularidades, formulação de conjecturas, entre outras (Vale, 2000; Velosa, 2008).

#### **4.1.2. Que dificuldades revelam os alunos na utilização dos materiais manipuláveis na aprendizagem de geometria?**

Durante a intervenção de ensino, registaram-se algumas das dificuldades sentidas pelos alunos na utilização dos diversos materiais manipuláveis nas aulas de Matemática e na avaliação de Geometria.

A Geometria é um dos grandes temas do Programa de Matemática do Ensino Básico e as construções geométricas têm grande importância na compreensão de grande parte dos conceitos lecionados. Mais ainda, os problemas apresentados no estudo deste tema desafiam o raciocínio e exigem um conhecimento dos teoremas e das propriedades de Geometria.

Segundo Velosa (2008), o Mira é um material interessante para consolidação e tratamento de noções ligados ao conceito de simetria, como exercitar a determinação e identificação dos eixos de simetria. Neste sentido, os alunos demonstraram alguma dificuldade, pois não tinham presentes e não se sentiam à vontade com estes conceitos e, conseqüentemente, a manipulação deste material tornou-se mais difícil. Assim, a dificuldade dos alunos na utilização deste material prende-se no conhecimento dos conteúdos

As construções geométricas contribuem em muito para uma aprendizagem significativa, mas para tal é imprescindível saber manipular o material de desenho e medida. Este material é utilizado pelos alunos em todos os níveis de ensino; no entanto, este estudo mostrou que no fim do 3.º ciclo do Ensino Básico os alunos ainda apresentam algumas dificuldades significativas. Nesta turma, as dificuldades registadas têm a ver mais especificamente com a manipulação do transferidor. Apesar de os alunos associarem este material à construção de ângulos, ainda não se sentem à vontade com a consulta da escala apresentada nos mesmos. De modo a se poder ler da esquerda para a direita e da direita para a esquerda os atuais modelos de esquadros apresentam a escala de medição de ângulos sobreposta duas vezes. Os alunos apresentam dificuldades em saber decidir se, aquando a construção de um ângulo, devem seguir a escala que está na parte superior ou na parte inferior do esquadro. Na tarefa *Ângulos congruentes* os alunos deram evidências de não ter noção do conceito de ângulo e, por esse motivo, não conseguirem decidir qual a escala do esquadro devem consultar.

O trabalho cooperativo, aliado à manipulação dos materiais, favoreceu a participação e o envolvimento dos alunos de aproveitamento mais fraco, evidenciando uma mudança de atitude em relação à aprendizagem (Velosa, 2008). Mais ainda, permitiu que os alunos adquirissem determinados valores e exercitassem atitudes ligados à cooperação (Abrantes, 1994; Velosa, 2008), como a interajuda, a partilha de ideias e o espírito de colaboração, tendo estas sido reveladas em maior ou menor grau, conforme os momentos da aula ou os objetivos de cada um dos alunos.

Os alunos foram impulsionados pela professora a manipular os materiais, a interagir, a elaborar e testar conjecturas. No entanto, este é um processo que exige tempo. Esta é uma turma com muitos alunos com dificuldades de aprendizagem e que, por norma, já costumam apresentar um ritmo de trabalho lento. Então, como dificuldades na manipulação dos materiais há ainda a referir a falta de autonomia da turma, evidenciada pela dependência da confirmação dos passos de execução das atividades pela professora, para avançarem nos trabalhos. Esta

situação verificou-se em variadas ocasiões e levou a despendar ainda mais tempo da aula do que era estipulado para estas atividades. Por isso, não querendo interferir o desenvolvimento natural das atividades, os alunos eram constantemente alertados para não demorarem muito tempo na resolução das atividades, o que, por vezes, causava algum *stress* nos alunos, levando-os, muitas vezes, a realizar as atividades sem haver conexão entre as manipulações e os conceitos matemáticos.

Nos momentos de avaliação, foi pedido aos alunos que resolvessem uma questão com o uso de materiais manipuláveis, nomeadamente, da régua e do compasso. Em geral, os alunos não mostraram dificuldades no manuseamento destes materiais manipuláveis.

#### **4.1.3. Qual a relação entre as percepções dos alunos sobre a influência dos materiais manipuláveis e a sua aprendizagem em geometria?**

Com o questionário aplicado aos alunos pretendeu-se averiguar as percepções dos alunos relativamente aos materiais manipuláveis utilizados durante a intervenção e ao trabalho de grupo.

Relativamente ao tema onde este projeto foi aplicado, torna-se importante perceber que 83,3% dos alunos gosta do tema Geometria; no entanto, 33,3% considera esta disciplina difícil de aprender sendo, em média, os alunos com nível de desempenho fraco os que mais partilham desta opinião. Gostar do que se faz é por vezes a chave da resolução de muitos problemas no ensino e poderá ser um contributo para ajudar os alunos a encararem a disciplina de Matemática de outra forma (Almiro, 2004).

Repare-se ainda que 94% da turma diz sentir-se mais motivada para aprender Matemática quando usa diversos materiais, sendo os alunos com melhor desempenho que mais partilham desta opinião. No entanto, como refere ME (2007), Lorenzato (2006), Pinheiro (2012), Vale (1999, 2000) e Velosa (2008), este tipo de atividades favorece tanto os alunos com dificuldades como os alunos mais capazes, sendo que os primeiros têm mais dificuldade em se desprenderem do material e dar o “salto” do concreto para o abstrato. Assim, os alunos reconhecem nesta metodologia de ensino e aprendizagem como vantagens o facto de ser um meio incentivador e motivador para aprender, a hipótese de possibilitar uma aprendizagem mais eficaz e de diminuir o grau de dificuldade das atividades. No entanto, também reconhecem desvantagens, como o facto de ser um meio de maior distração e barulho dos alunos nas aulas e a necessidade de mais tempo para realizar as atividades, desvantagens que foram apontadas

nos estudos de Almiro (2004), Lorenzato (2006), Pinheiro (2012) e Vale (2000). Outra desvantagem referida por metade da turma foi o fator esquecimento referindo que, por esse motivo, têm a penalização de ficar registada uma falta de material.

É importante perceber que 88,8% da turma considera que as tarefas realizadas em sala de aula permitiram ganhar destreza e à vontade na manipulação do material de desenho e medida, sendo que no final da intervenção todos os alunos referem não ter grande dificuldade em manipular estes materiais. No entanto, os alunos com necessidades educativas especiais demonstram que as tarefas não foram suficientes para ganhar a máxima destreza na manipulação do material de desenho e medida. Quanto ao Mira, é o material manipulável que os alunos apresentam mais dificuldade em manipular, tanto antes como depois da intervenção. No entanto, a maioria dos alunos referem que gostaram de trabalhar com este material e que foi importante para a aprendizagem dos conceitos de mediatriz e de bissetriz. A atividade dos recortes e montagem de papel foi a que mais consenso reuniu na turma quanto ao gosto pela sua dinâmica. Toda a turma refere que gostou de explorar situações de geometria com recurso a recortes e montagem de papel e, à exceção de um aluno, referem que esta atividade foi importante para a compreensão dos conceitos envolvidos e que gostavam de realizar mais atividades com este material. Constitui uma indicação de que, com estas atividades, os alunos aprenderam a valorizar os processos experimentados em vez do resultado final de cada tarefa (Ministério da Educação, 2007). A escolha adequada tanto dos materiais como das tarefas a realizar são um fator importante para fomentar nos alunos o gosto e argúcia pela Matemática. Neste tipo de atividades acresce o grau de imprevisibilidade quanto à adequação aos alunos, isto é, se são fáceis ou difíceis e se cativa os alunos, o que só é confirmado quando aplicado Almiro (2004).

Repare-se que a integração das duas metodologias de ensino e aprendizagem, o trabalho de grupo com o uso de materiais manipuláveis, contribuiu para uma melhor aprendizagem. A maioria da turma identifica nesta estratégia de ensino um papel importante dos elementos do grupo no esclarecimento de dúvidas e assim ultrapassarem as dificuldades sentidas durante a realização das tarefas. Durante a realização deste estudo assistiu-se a troca de ideias, conhecimentos e experiências entre os alunos, bem como interpretações e reflexões (individualmente e com os parceiros) sobre as situações de aprendizagem com que se deparavam. Mesmo os alunos que, por vezes, se mostraram mais resistentes a expor as ideias

com os colegas acabavam por o fazer, ou, até mesmo, quando não se sentiam capazes, pedir a um parceiro que explicasse ao outro.

Quando questionados sobre outros materiais que gostavam de ter utilizado nas atividades em sala de aula, apenas dois alunos referiram o computador com o *software* geogebra. Assim, os materiais manipuláveis utilizados parece que foram ao encontro das necessidades da turma. Um estudo realizado por Oliveira (2009) mostra que, perante os dois ambientes de aprendizagem, *software* e régua e compasso, o *software* não reuniu a preferência dos alunos. Segundo Rossini (2010), quando as construções são feitas apenas pelo uso de um *software*, alguns procedimentos são realizados pelos alunos sem serem demonstrados, dificultando a formalização das provas. Assim, esta autora reforça a ideia de que, inicialmente, se deve proceder a um trabalho realizado com o material de desenho e medida e, posteriormente, passar para o *software*. Por outro lado, num estudo realizado por Vinhas (2008), num estudo realizado sobre o ensino e aprendizagem de lugares geométricos com recurso ao CD-ROM Escola Virtual, um dos aspetos negativos revelados pelos alunos é a impossibilidade de manipulação.

#### **4.2. Implicações para o ensino e aprendizagem**

Deste estudo, resultam várias implicações para o ensino e aprendizagem da Geometria com recurso a materiais manipuláveis.

Neste estudo, averiguaram-se as perceções dos alunos relativamente ao uso dos materiais manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem. Os alunos reconheceram muitas vantagens nesta estratégia de ensino, mas também algumas desvantagens, embora em menor número. Referem, ainda, que, com esta estratégia de ensino, se sentem mais motivados para aprender Matemática. Mais ainda, os alunos revelam que as tarefas colocadas pela professora permitiram ganhar destreza na utilização dos materiais de desenho e medida, à exceção de um aluno com necessidades educativas especiais.

Quando um professor apresenta uma tarefa em sala de aula, deve previamente pensar em possíveis erros, dificuldades e estratégias que os alunos podem adotar na resolução da mesma. Neste sentido, este estudo dá conta de alguns desses contratempos que surgem no processo de ensino e aprendizagem da Geometria, para que o professor possa previamente pensar nelas para que não incorra nos mesmos contratempos.

Como referem outros estudos, também neste se registaram desvantagens do uso de materiais manipuláveis que em algumas situações podia comprometer a correta aprendizagem dos alunos. O ruído provocado pelo entusiasmo no manuseamento dos materiais pode ser um entrave ao sucesso de uma tarefa em sala de aula. No entanto, é incontornável que haja ruído nestas situações e cabe ao professor perceber se esse ruído advém da atividade matemática ou de brincadeiras dos alunos, para que saiba como intervir. Porém, esta é uma situação que pode ser contornada, caso o professor utilize frequentemente os materiais manipuláveis, pois os alunos vão ultrapassando as dificuldades e habituando-se a diferentes tipos de atividades. Outro aspeto que influencia o sucesso de uma atividade com recurso a materiais manipuláveis é o tempo que o professor destina para a sua realização. O tempo que se dedica para uma determinada tarefa com manipulação dos materiais é sempre uma incógnita, já que depende de muitos fatores. Assim, tendo em conta a heterogeneidade das turmas, os ritmos de aprendizagem e a dependência ao material, o professor poderá fazer uma estimativa do tempo que prevê para a realização da tarefa. No entanto, aquando da sua implementação, o professor não deve dar tempo de mais, nem de menos e é este balizar que é difícil de fazer.

Os momentos de discussão e reflexão grupo-turma adotada segundo o modelo de Smith et al (2009) mostraram-se importantes no sentido de dar a conhecer as diferentes estratégias de resolução das atividades pensadas pelos alunos e para clarificar as conclusões que estes retiraram das tarefas. Quanto à realização do estudo em si, a implementação deste modelo de ensino também permitiu que ficasse registado modo audiovisual, uma vez que tinha uma câmara a gravar o grupo-turma, as estratégias e dificuldades dos alunos.

Por todas as implicações aqui relatadas, este projeto revelou-se crucial para o desenvolvimento da professora-autora, na medida em que teve a oportunidade de conhecer um material manipulável que não conhecia, o Mira, e, trabalhar com o papel e o material de desenho e medida que, apesar de já conhecer, não reconhecia potencial nesses materiais em atividades de exploração e investigação. Reconhece-se que, neste tipo de aulas, o papel do professor é de mediador das aprendizagens e centra-se em estimular nos alunos, através de questões e sugestões, a reflexão sobre questões que este vai colocando. Assim, pretende continuar a desenvolver este gosto em aplicar diferentes metodologias e estratégias, sempre com vista no incentivo ao gosto e sucesso dos alunos em Matemática.

#### 4.3. Recomendações e limitações

Os resultados deste estudo sugerem algumas recomendações significativas para futuros estudos desta índole, bem como para o trabalho do professor na sala de aula, e alertam para algumas limitações que foram surgindo.

Após análise aqui realizada, considera-se importante que, quando os alunos utilizam o Mira pela primeira vez, mesmo havendo referência que já utilizaram este material antes, os alunos tenham a oportunidade de explorar o material com situações simples, para recordarem o modo de funcionar. Assim ao explorarem-no à vontade, satisfazendo as suas curiosidades, os alunos podem familiarizar-se com o material ou relembrar como funciona. No entanto, tal não foi possível, devido a questões de tempo: por um lado, devido ao curto tempo estipulado para esta intervenção de ensino e, por outro lado, por ser este um ano de exame nacional e não poder haver atrasos no programa, tornando-se assim uma limitação para o estudo. Ainda relativamente a este material, para as atividades em questão, foi essencial os alunos terem à sua disposição um Mira para que cada um dos alunos pudesse explorar a tarefa. No entanto, a escola não possuía material suficiente para todos os elementos da turma e colmatou-se a situação requisitando o material na universidade. Esta seria uma limitação que poderia por em causa a realização de atividades com este material, em particular, para este estudo.

De seguida, apresento algumas questões que foram surgindo ao longo deste estudo e que podem ser objeto de estudo de futuras investigações.

Já que este estudo foi realizado numa turma, seria interessante alargar este estudo a um contexto de intervenção mais amplo. Assim seria interessante perceber, por exemplo, se para um mesmo ano de escolaridade e um mesmo conteúdo, em território nacional, o impacto da utilização dos materiais manipuláveis é o mesmo em todas as regiões.

Outra questão pertinente seria a realização deste estudo num contexto de intervenção que pudesse ser analisado num período de tempo mais alargado, de um ano letivo, ou quem sabe, de um ou mais ciclos de estudo. Assim, poder-se-ia avaliar se o facto de os alunos se habituarem a atividades com recurso a materiais manipuláveis permite, de facto, o colmatar de muitos dos problemas que se colocam com a sua utilização, como, por exemplo, o aumento do tempo despendido, o aumento do barulho e a falta de autonomia.

Uma vez que estamos na era da tecnologia, seria pertinente um estudo em que se tivesse em conta o uso de materiais manipuláveis e o uso da tecnologia no estudo de um mesmo conteúdo programático. Neste sentido, torna-se interessante perceber que tipo de tarefas

e, quem sabe, conteúdos, saem prevalecidos com a utilização dos diferentes recursos no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, pressuponho que o manuseamento de materiais manipuláveis em sala de aula será um meio impulsionador na aquisição e construção de conceitos matemáticos, principalmente em geometria.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. Ponte, J., Fonseca, H. & Brunheira, L. (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. (pp. 153 – 168) Lisboa: APM e Projeto MPT.
- Almiro, J. (2004). *Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática*. Consultado em maio, 15, 2013 em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/sd/textos/GTI-Joao-Almiro.pdf>.
- Armstrong, A. (2008). The fragility of group flow: The experiences of two small groups in a middle school mathematics classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, 27, 101 – 115.
- Botas, D. (2008). *A utilização de materiais didáticos nas aulas de Matemática. Um estudo no 1.º ciclo*. Tese de mestrado ensino das Ciências, Universidade Aberta, Lisboa, Portugal.
- Correia, P. F. (2011). Informação para o conselho de turma. Documento policopiado, Escola Secundária/3 de Barcelos.
- Cow, B., & Cow, B. (2008). Developing interpersonal and group dynamics through asynchronous threaded discussions: the use of discussion board in collaborative learning. *Education*, 128(4), 553 – 565.
- Cortesão, L., Leite, C., & Pacheco, J. (2003). Trabalhar por projetos em educação. Uma inovação interessante? Porto: Porto Editora.
- Fonseca, L., Palhares, P., & Pimentel, T. (1990). O Mira: um novo material para o ensino da Geometria. *Educação e Matemática*, 14, 15 – 16.
- Gomes, A., & Ralha, E. (2005). O conceito de ângulo: experiências e reflexões sobre o conhecimento matemático de (futuros) professores do 1.º ciclo. *Quadrante*, 15(1), 109 – 131.
- Hartshorn, R., & Boren, S. (1990). *Experiential learning of mathematics: using manipulatives*. Consultado em maio, 25, 2013, em: <http://www.ericdigests.org/pre-9217/math.htm>.
- Hill, M., & Hill, A. (2002). *Investigação por questionário*. Lisboa: Edições Sílabo.
- Lopes, J. (2005). *Dificuldades de aprendizagem de leitura e de escrita: perspetivas de avaliação e integração*. Porto: Asa.
- Lorenzato, S. (2006). Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: Lorenzato, S. *Laboratório de ensino da matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados.

- Martinho, M. H. (2011). *Comunicação na sala de aula de matemática: um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico*, Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Martinho, M. H., & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. In *Atas do XVI SIEM* (pp. 273 – 293), Évora.
- Ministério da Educação – Departamento do Ensino Básico. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais*. Lisboa: ME.
- Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: autor.
- Matos, J., & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- NCTM (1998). *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- NCTM (2001). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- NCTM (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Oliveira, S. (2009). *Um estudo de argumentações produzidas por alunos do 8.º ano em atividades de construções geométricas envolvendo pontos notáveis de triângulos*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso Sul, Campo Grande, Brasil.
- Olson, A. (1975). *Mathematics Through Paper Folding*. Washington: NCTM
- Pacheco, J. (2008). Estrutura Curricular do Sistema Educativo Português. In J. A. Pacheco (Org.), *Organização Curricular Portuguesa*. Porto: Porto Editora.
- Pinheiro, C. (2012). *Os materiais manipuláveis e a geometria – um estudo no 6.º ano de escolaridade do Ensino Básico num contexto de isometrias*. Tese de Mestrado em Didática da Matemática e das Ciências da Natureza, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Viana do Castelo, Portugal.
- Pires, M. (2006). *A construção do conhecimento profissional: Um estudo com três professores*. In *Atas do XVII SIEM*. Setúbal: APM. (edição em CD-ROM).
- Rodrigues, F., & Gazire, E. (2012). Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. *Revemat.* 7(2), 187 – 196.

- Rossini, M. (2010). *Um estudo sobre o uso de régua, compasso e um software de geometria dinâmica no ensino da geometria hiperbólica*. Tese de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, Brasil.
- Row's, T. (1917). *Geometric Exercises in Paper Folding*. London: The Open Court Publishing Company.
- Smith, M., Hughes, E., Engle, R., & Stein, M. (2009). Orches discussions. *Mathematics Teaching in the midle school*, 14(9), 548 – 556.
- Sowell, E. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Matemathics Education*, 20(5), 498 – 505.
- Vale, I. (1999). Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz. In APM (Eds.), *Actas do ProfMat 99*. Lisboa: APM.
- Vale, I. (2000). *Didáctica da Matemática e Formação Inicial de Professores num Contexto de Resolução de Problemas e de Materiais Manipuláveis*. Tese de doutoramento em Educação, Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.
- Vale, I. (2002). *Materiais Manipuláveis*. ESEVC: LEM.
- Velosa, R. (2008). *A aprendizagem da Geometria com recurso aos materiais manipuláveis no 7.º ano de escolaridade*. Dissertação de Mestrado em Ensino, Universidade da Madeira, Madeira, Portugal.
- Veloso, E. (2000). *Geometria. Temas Actuais: Materiais para Professores*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Vinhas, O. (2008). *Ensino e aprendizagem da matemática com recurso ao CD-ROM Escola Virtual: Um estudo sobre os lugares geométricos no 8.º ano*. Tese de mestrado em Ensino da Matemática, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal.



## **ANEXO I**

Pedido de Autorização da Escola



Exmo. Senhor Presidente da  
Comissão Administrativa Provisória do  
Agrupamento de Escolas de Barcelos

No âmbito do curso de Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, da Universidade do Minho, nós, Andreia Abreu e Maria Júlia Alves, professoras estagiárias de Matemática desta Escola, encontrámo-nos a elaborar um relatório de estágio, intitulado *O ensino e aprendizagem de Geometria com recurso a materiais manipuláveis: uma experiência com alunos do 9º ano de escolaridade* e *As interações dos alunos em pequenos grupos na aprendizagem da Geometria no 9º ano de escolaridade*, respetivamente.

O relatório de estágio pressupõe um projeto de intervenção pedagógica supervisionada em Educação Matemática. Este projeto orienta-se no sentido de definir temas, objetivos e estratégias de ação, que decorram da observação e análise das práticas de ensino e aprendizagem na área de docência e contribuam para a compreensão e melhoria dessas práticas. Nesse sentido, há necessidade de efetuar uma recolha de dados que, nestes estudos, impõe gravações audiovisuais de algumas aulas de Matemática.

De forma a viabilizar este estudo, solicitamos a V. Exa. autorização para realizar as gravações nas aulas de Matemática.

Quer no processo de recolha de dados, quer no relatório de estágio, comprometemo-nos a garantir o anonimato em relação à identidade dos alunos da turma e ainda a solicitar a autorização aos Encarregados de Educação.

Desde já agradecemos a sua atenção.

Com os melhores cumprimentos,

30 de Novembro de 2011

Autorização

As professoras estagiárias

\_\_\_\_\_

(Andreia Cristina Freitas Abreu)

\_\_\_\_\_

(Maria Júlia Rodrigues Alves)

\_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2012

O Presidente da CAP

\_\_\_\_\_

(Jorge Manuel Vaz Saleiro)





## **ANEXO II**

Pedido de Autorização aos Encarregados de Educação



Exmo(a) Senhor(a)

Encarregado(a) de Educação do(a) aluno(a)

---

N.º \_\_\_\_\_, da turma B, 9.º ano

Eu, Andreia Abreu, Estagiária de Matemática na Escola Secundária de Barcelos, no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário, da Universidade do Minho, pretendo desenvolver uma investigação em Educação Matemática, intitulada **O ensino e aprendizagem de Geometria com recurso a Materiais Manipuláveis: uma experiência com alunos do 9º ano de escolaridade**.

O relatório de estágio pressupõe um projeto de intervenção pedagógica supervisionada em Educação Matemática. Este projeto orienta-se no sentido de definir temas, objetivos e estratégias de ação, que decorram da observação e análise das práticas de ensino e aprendizagem na área de docência e contribuam para a compreensão e melhoria dessas práticas. Nesse sentido, há necessidade de efetuar uma recolha de dados que, no meu estudo, impõe gravações audiovisuais de algumas aulas de Matemática e a aplicação de questionários.

Quer no processo de recolha de dados, quer no tratamento dos dados no relatório de estágio, comprometo-me a garantir o anonimato em relação à identidade de todos os alunos da turma.

Após autorização concedida pela Direção da Escola, solicito de igual modo a autorização de V. Exa. para efetuar as gravações audiovisuais de algumas aulas, de forma a viabilizar este projeto de intervenção pedagógica supervisionada.

Desde já, muito obrigado pela sua colaboração.

Autorizo

Barcelos, \_\_\_\_ de dezembro de 2012

A professora estagiária,

Barcelos, \_\_\_\_ de janeiro de 2013.

Assinatura do(a) Encarregado(a) de Educação

---

(Andreia Cristina Freitas Abreu)



**ANEXO III**  
Questionário



Estimado(a) aluno(a)

Peço-te que respondas a este questionário, com o objetivo de conhecer a tua opinião sobre a utilização de diferentes materiais no ensino e aprendizagem de Geometria.

A informação que vais partilhar é da maior importância para o estudo que me encontro a realizar, o qual tem por meta última a melhoria das práticas de ensino de professores de matemática. Por esta razão, é necessário que leias com atenção e respondas a todas as questões com sinceridade e empenho.

Pela minha parte, comprometo-me a não usar os dados obtidos a não ser para o uso exclusivo deste estudo, garantindo sempre o anonimato das respostas.

Grata pela colaboração,

*Andreia Abreu*

---

## I – Dados Pessoais

Nome: \_\_\_\_\_ N.º \_\_\_\_\_

Idade: \_\_\_\_\_

---

## II – O ensino e a aprendizagem de Geometria com diferentes materiais

As afirmações que se seguem referem-se às aulas do tema de Geometria. Assim, estão expressas algumas ideias e atitudes acerca do tema Geometria e dos diferentes materiais que utilizaste durante essas aulas. Para cada afirmação, assinala com um X o grau de concordância que lhe atribuis, considerando que todas as opções de resposta utilizam a seguinte escala:

<i>Discordo Totalmente</i>	<i>Discordo Parcialmente</i>	<i>Concordo Parcialmente</i>	<i>Concordo Totalmente</i>
DT	DP	CP	CT

1. Gosto de geometria.	DT	DP	CP	CT
2. Aprender geometria é muito importante para a minha formação.	DT	DP	CP	CT
3. A geometria ajuda a compreender o mundo onde vivemos.	DT	DP	CP	CT
4. A geometria é difícil de aprender.	DT	DP	CP	CT
5. Quando estudo geometria posso investigar, experimentar e explorar relações.	DT	DP	CP	CT
6. Sinto-me mais motivado para aprender matemática quando uso materiais diversificados.	DT	DP	CP	CT
7. No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular a <i>régua</i> .	DT	DP	CP	CT
8. No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular o <i>compasso</i> .	DT	DP	CP	CT
9. No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular o <i>esquadro</i> .	DT	DP	CP	CT
10. No início do estudo deste tema tinha muita dificuldade em manipular o <i>transferidor</i> .	DT	DP	CP	CT
11. Continuo a ter dificuldade em manipular a <i>régua</i> .	DT	DP	CP	CT
12. Continuo a ter dificuldade em manipular o <i>compasso</i> .	DT	DP	CP	CT
13. Continuo a ter dificuldade em manipular o <i>esquadro</i> .	DT	DP	CP	CT
14. Continuo a ter dificuldade em manipular o <i>transferidor</i> .	DT	DP	CP	CT
15. As tarefas que fiz nas aulas obrigaram-me a trabalhar com a régua, o compasso, o esquadro e o transferidor.	DT	DP	CP	CT
16. As tarefas que realizei nas aulas permitiram-me ganhar destreza na manipulação da régua, do compasso, do esquadro e do transferidor.	DT	DP	CP	CT
17. O MIRA foi importante para a aprendizagem dos conceitos de mediatriz e de bissetriz.	DT	DP	CP	CT
18. Gostei das aulas em que foi utilizado o MIRA.	DT	DP	CP	CT
19. No início tive muitas dificuldades em manipular o MIRA.	DT	DP	CP	CT
20. Continuo a ter dificuldades em trabalhar com o MIRA.	DT	DP	CP	CT
21. Gostei de explorar situações de geometria com recurso a recortes e montagens de papel.	DT	DP	CP	CT
22. A utilização de recortes e montagens de papel foram importantes na compreensão dos conceitos envolvidos.	DT	DP	CP	CT
23. Gostava de fazer mais atividades com recurso a recortes e montagens de papel.	DT	DP	CP	CT

De seguida apresentam-se algumas questões que peço que leias com atenção e tentes apresentar respostas completas.



24. Que *vantagens* reconheces na utilização de diferentes materiais na sala de aula para aprender matemática?

---

---

---

---

25. Que *desvantagens* reconheces na utilização de diferentes materiais na sala de aula para aprender matemática?

---

---

---

---

26. Que papel tiveram os elementos do teu grupo na tua aprendizagem em manipular os materiais? Justifica.

---

---

---

---

27. Que outros materiais gostavas que fossem utilizados nas aulas de geometria?

---

---

---

---

28. Consideras que saber manipular a régua, o compasso, o esquadro e o transferidor é útil para o teu futuro? Porquê?

---

---

---

---



#### **ANEXO IV**

Atividade de recorte e montagem de Papel.



Escola

**Tarefa:** Ângulos internos de um polígono



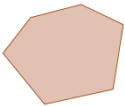


Núcleo de Estágio de Matemática.

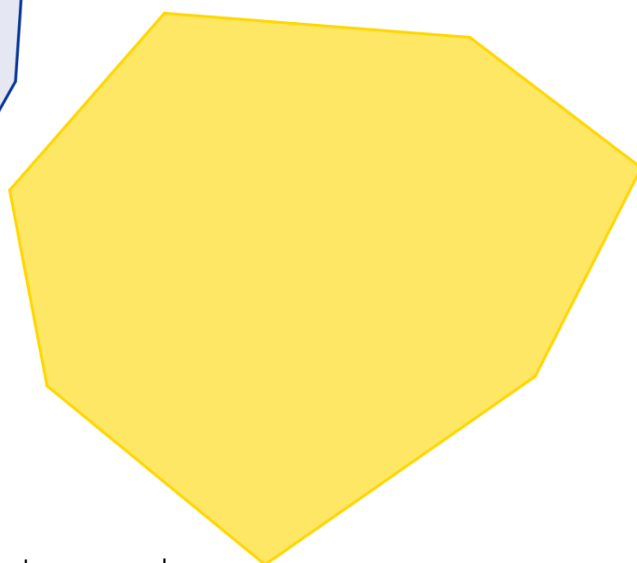
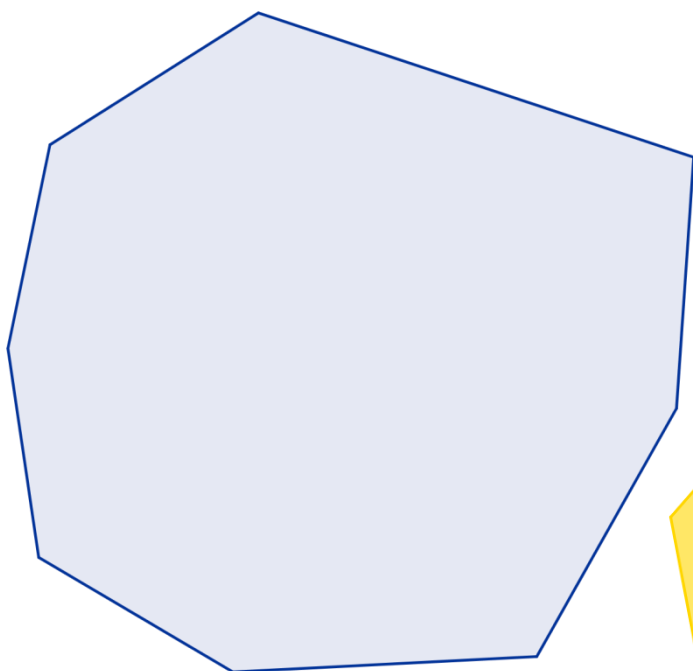
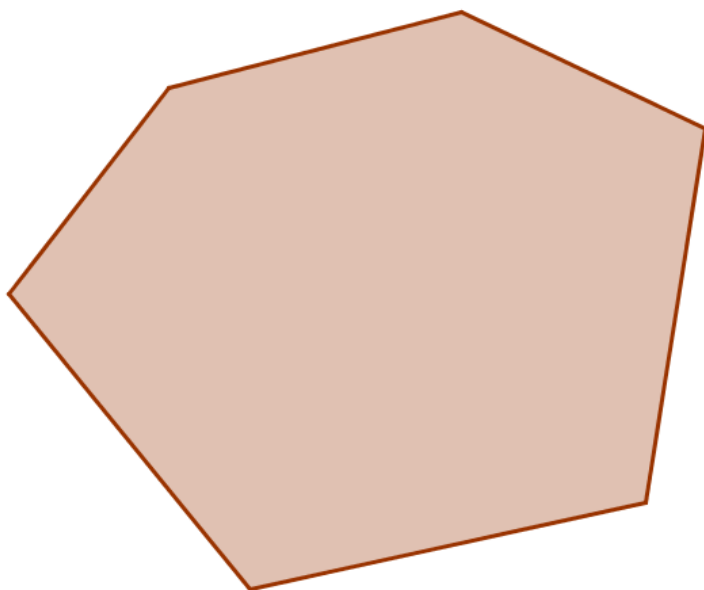
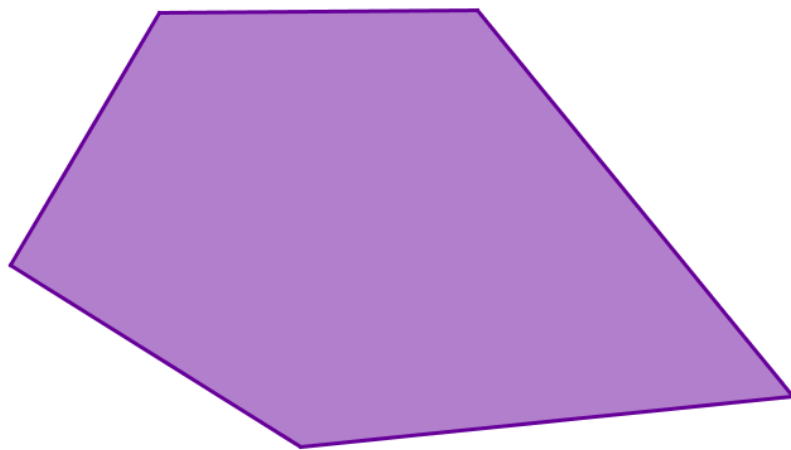
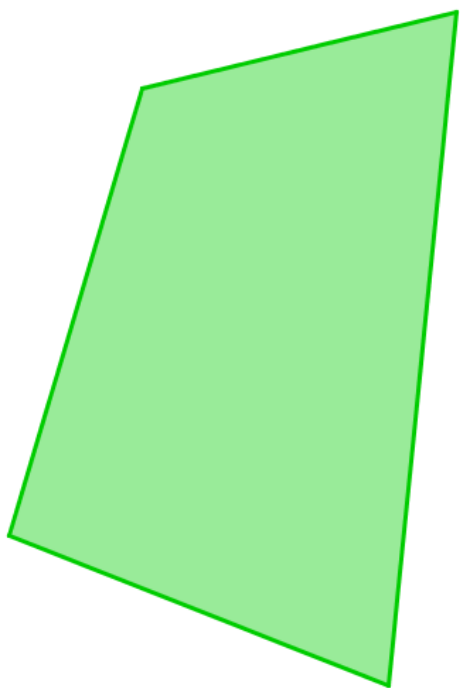
Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ N°: \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Fixa um vértice e a partir dele traça as diagonais.
2. Recorta os triângulos obtidos na etapa anterior.
3. Preenche a tabela:

Polígono	Número de lados	Número de triângulos	Soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono
			
			
			
			
			
	n		



Estes polígonos foram impressos em papel tipo cartolina para entregar aos alunos.

Escola

**Tarefa:** Ângulos internos de um polígono

Núcleo de Estágio de Matemática.

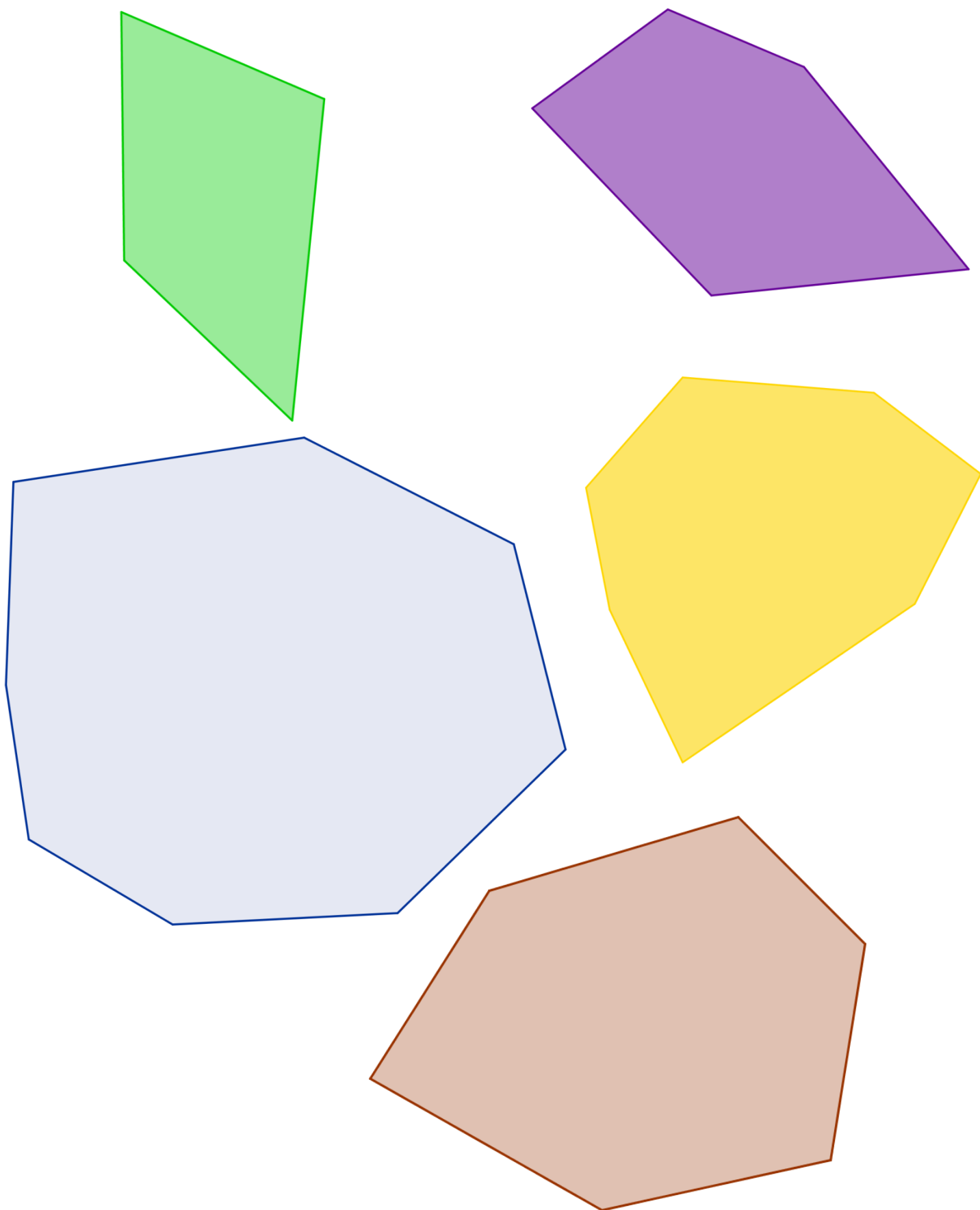
Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ N°: \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Fixa um vértice e a partir dele traça as diagonais.
2. Recorta os triângulos obtidos na etapa anterior.
3. Preenche a tabela:

Polígono	Número de lados	Número de triângulos	Soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono
			
			
			
			
			
	n		



Estes polígonos foram impressos em papel tipo cartolina para entregar aos alunos.



Escola

**Tarefa:** Ângulos internos de um polígono

Núcleo de Estágio de Matemática.

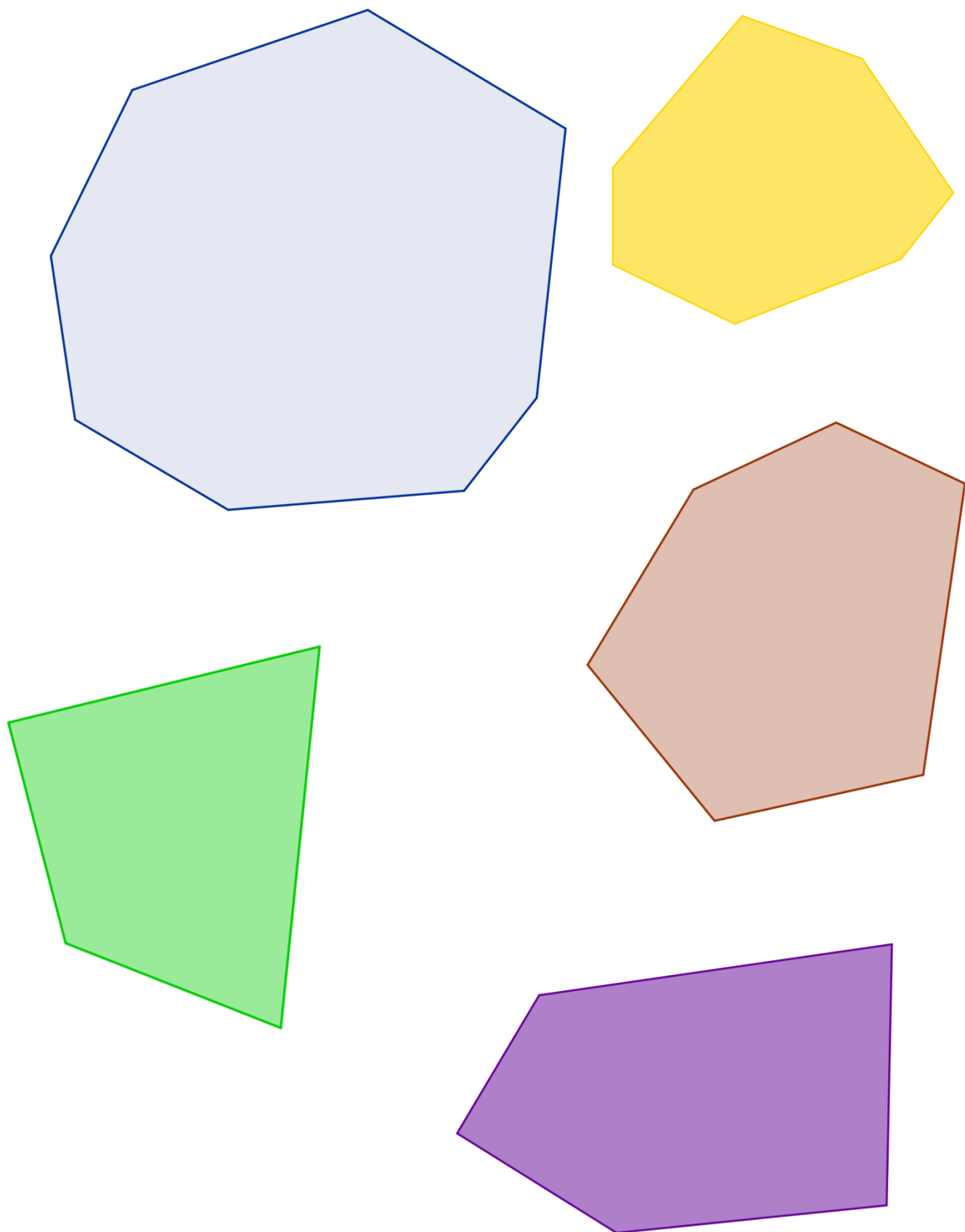
Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ N°: \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Fixa um vértice e a partir dele traça as diagonais.
2. Recorta os triângulos obtidos na etapa anterior.
3. Preenche a tabela:

Polígono	Número de lados	Número de triângulos	Soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono
			
			
			
			
			
	n		



Estes polígonos foram impressos em papel tipo cartolina para entregar aos alunos.

Escola

**Tarefa:** Ângulos internos de um polígono

Núcleo de Estágio de Matemática.

Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_


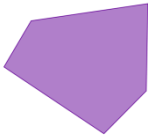
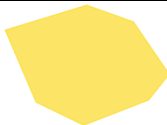
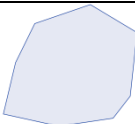
Nome: \_\_\_\_\_ N°: \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

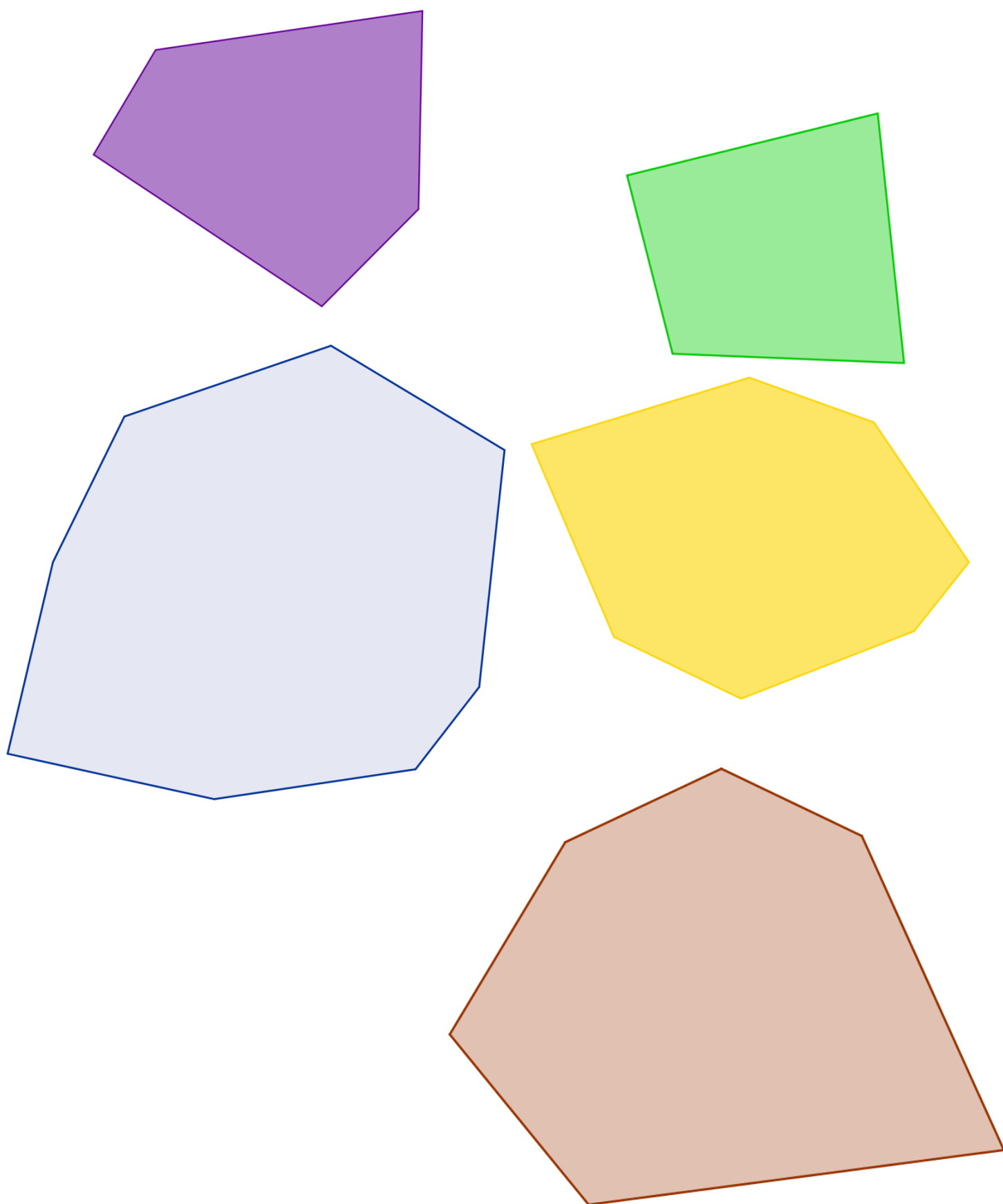
Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Fixa um vértice e a partir dele traça as diagonais.

2. Recorta os triângulos obtidos na etapa anterior.

3. Preenche a tabela:

Polígono	Número de lados	Número de triângulos	Soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono
			
			
			
			
			
	n		



Estes polígonos foram impressos em papel tipo cartolina para entregar aos alunos.

Escola

**Tarefa:** Ângulos internos de um polígono

Núcleo de Estágio de Matemática.

Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_ N°: \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

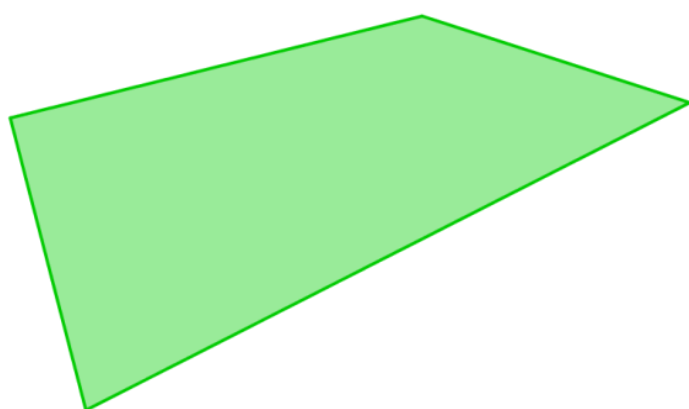
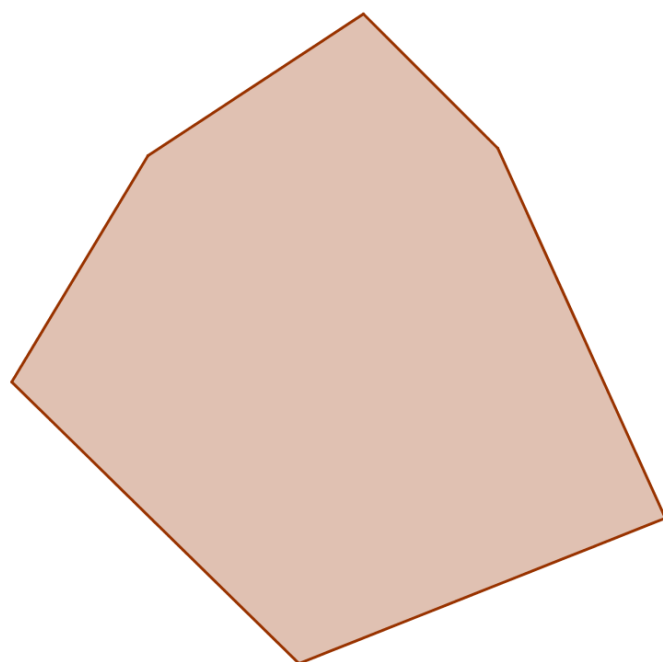
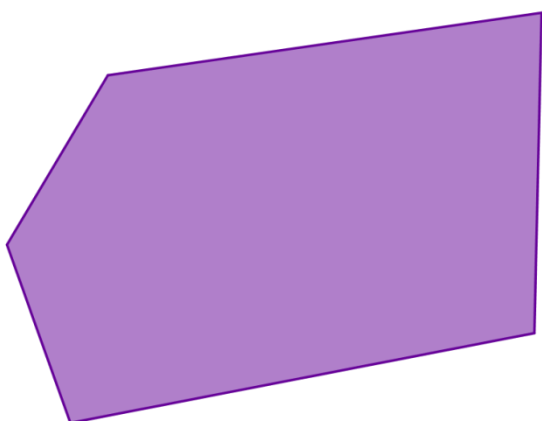
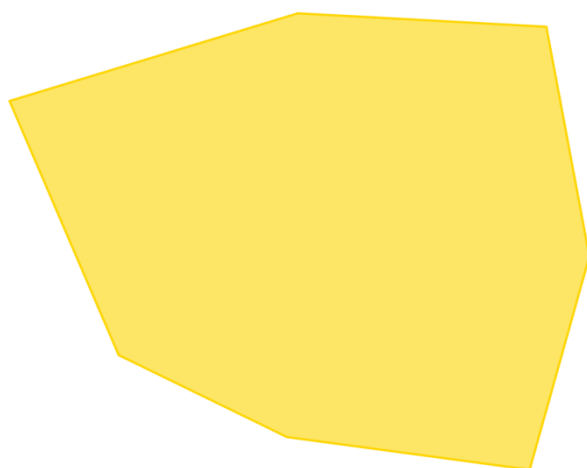
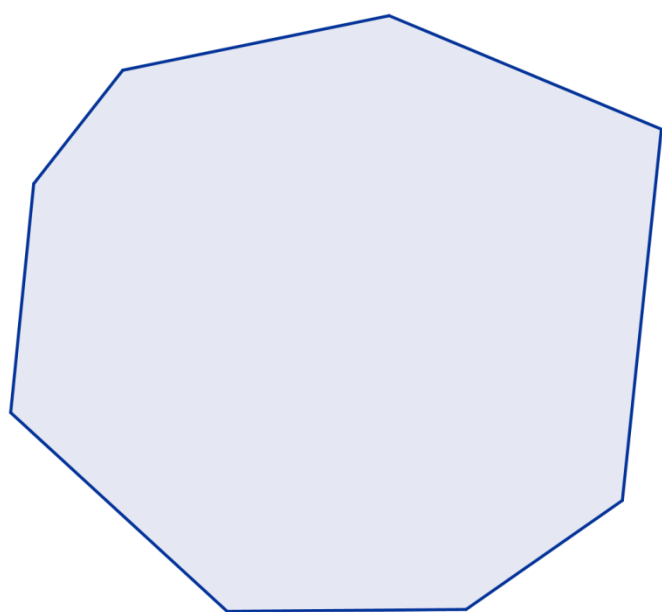
Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Fixa um vértice e a partir dele traça as diagonais.

2. Recorta os triângulos obtidos na etapa anterior.

3. Preenche a tabela:

Polígono	Número de lados	Número de triângulos	Soma das amplitudes dos ângulos internos do polígono
			
			
			
			
			
	n		



Estes polígonos foram impressos em papel tipo cartolina para entregar aos alunos.

Escola

**Tarefa:** Ângulos externos de um polígono

Núcleo de Estágio de Matemática.



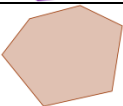


Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

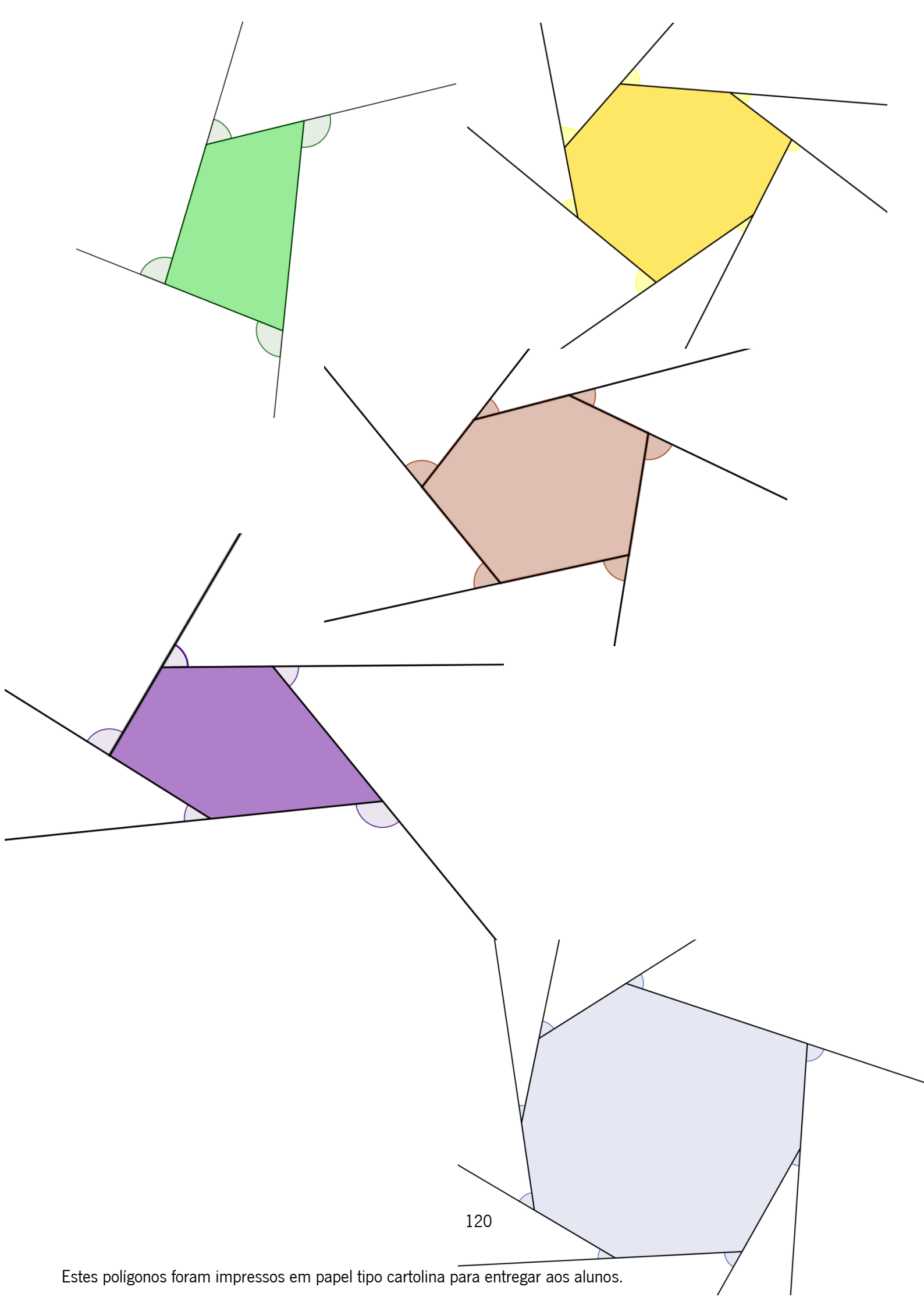
Nome: \_\_\_\_\_ N°: \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Recorta cada um dos ângulos externos.

2. Preenche a seguinte tabela.

Polígono	Número de lados	Soma das amplitudes dos ângulos externos do polígono
		
		
		
		
		
	n	





Escola

**Tarefa:** Ângulos externos de um polígono

Núcleo de Estágio de Matemática.

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

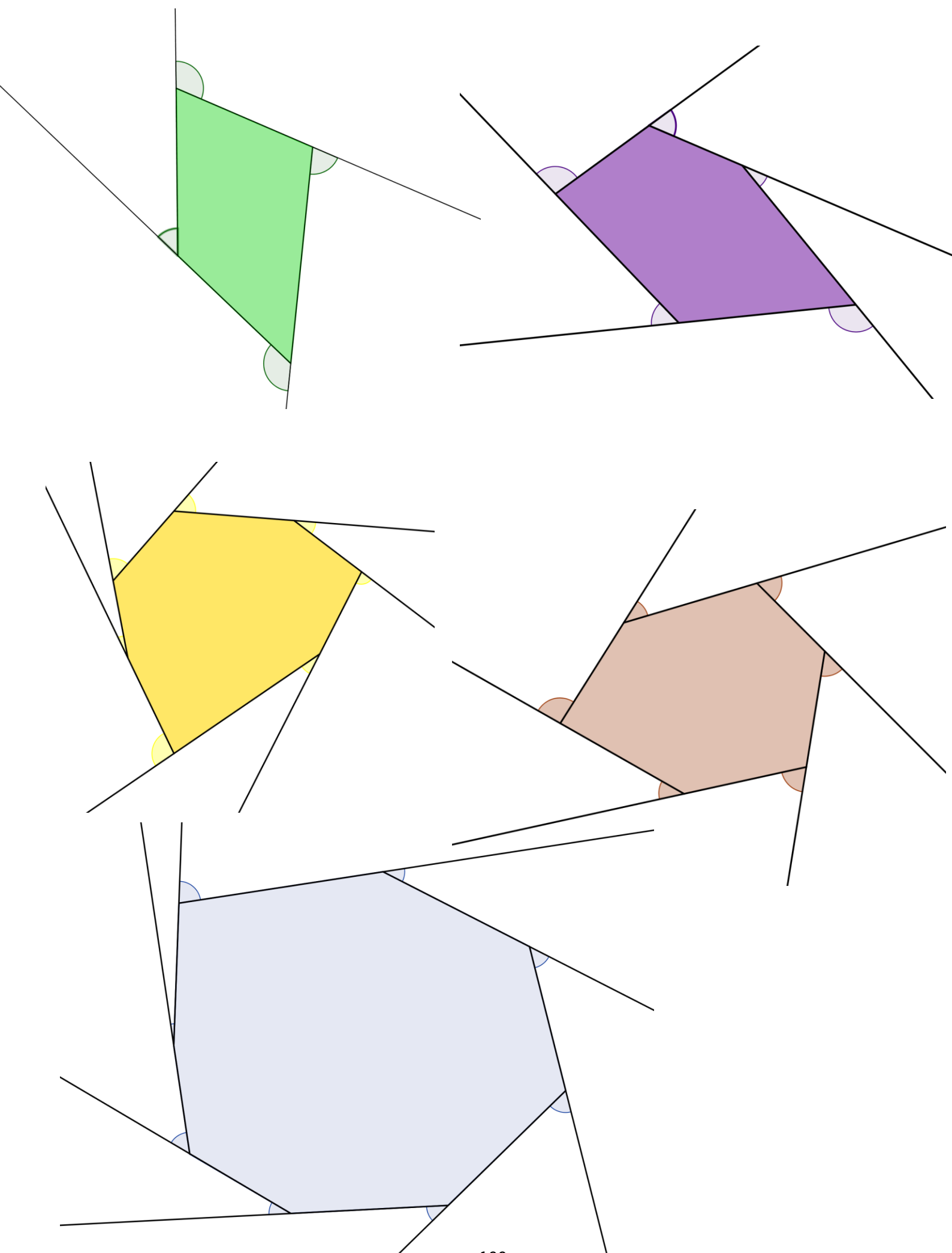
Nome: \_\_\_\_\_ N°: \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Recorta cada um dos ângulos externos.

1. Preenche a seguinte tabela.

Polígono	Número de lados	Soma das amplitudes dos ângulos externos do polígono
		
		
		
		
		
	n	



Escola

**Tarefa:** Ângulos externos de um polígono

Núcleo de Estágio de Matemática.

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

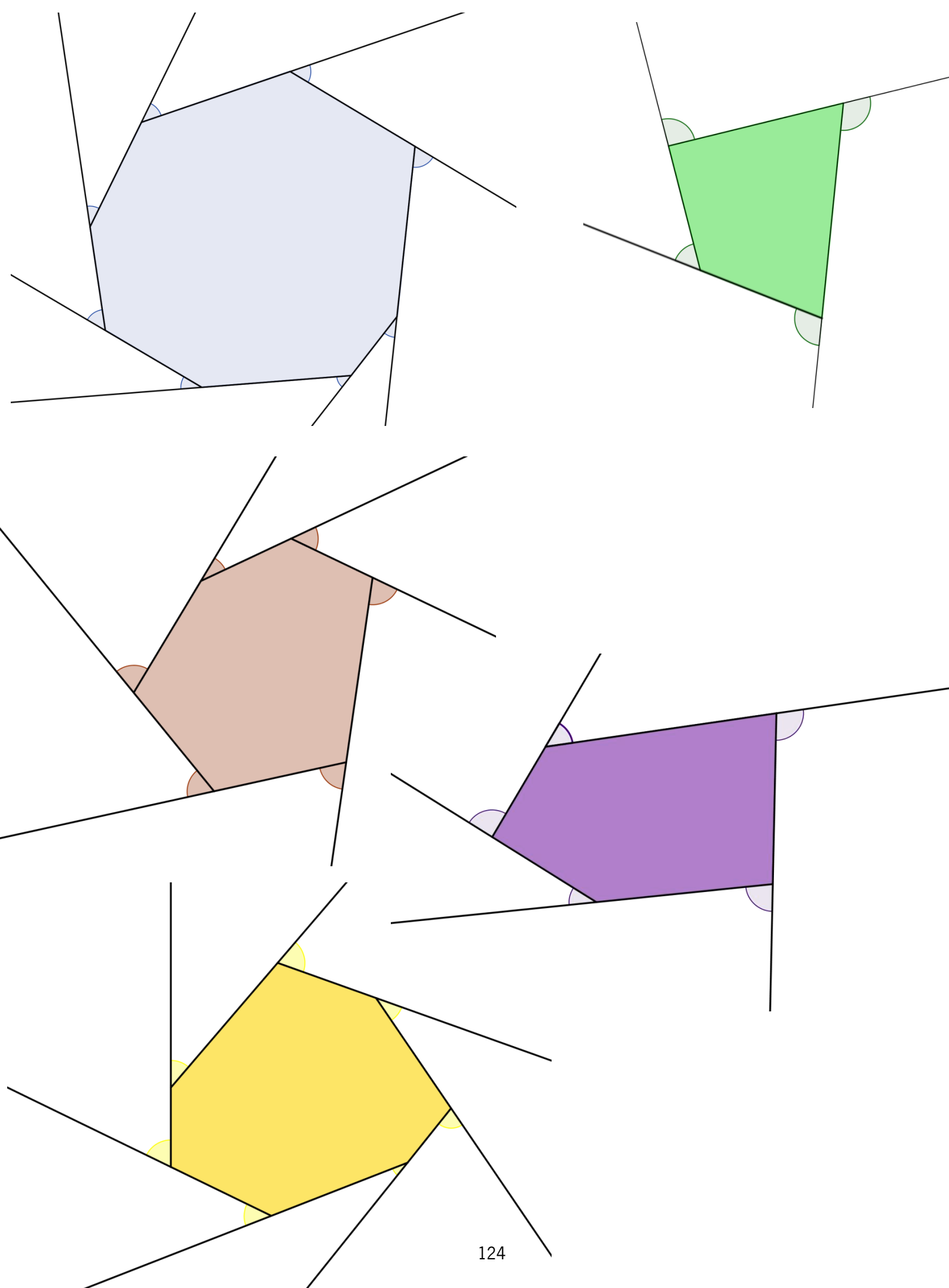
Nome: \_\_\_\_\_ N°: \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Recorta cada um dos ângulos externos.

1. Preenche a seguinte tabela.

Polígono	Número de lados	Soma das amplitudes dos ângulos externos do polígono
		
		
		
		
		
	n	



Escola

**Tarefa:** Ângulos externos de um polígono

Núcleo de Estágio de Matemática.

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

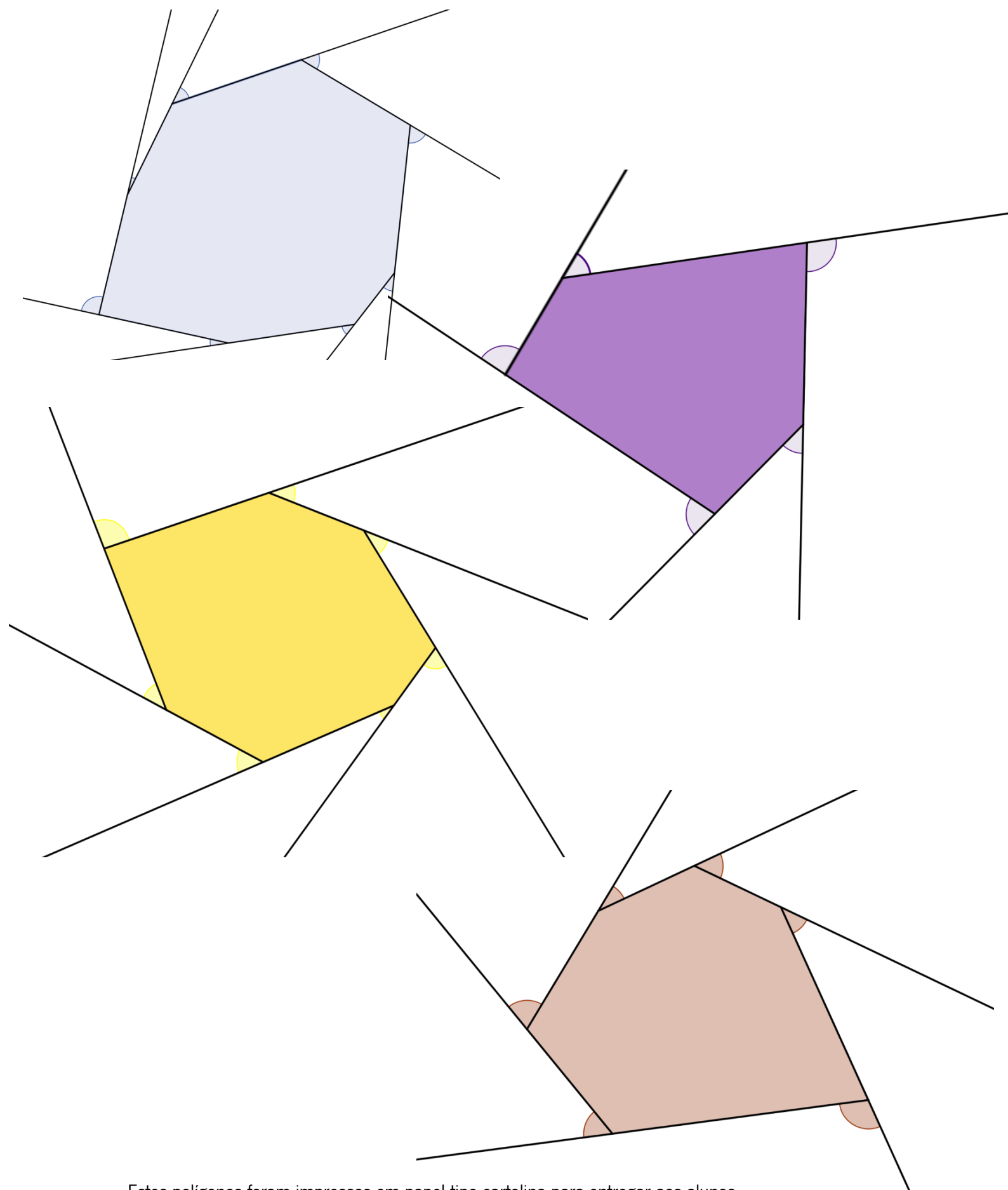
Nome: \_\_\_\_\_ N°: \_\_\_\_\_ Turma \_\_\_\_\_

Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Recorta cada um dos ângulos externos.

1. Preenche a seguinte tabela.

Polígono	Número de lados	Soma das amplitudes dos ângulos externos do polígono
		
		
		
		
		
	n	



Estes polígonos foram impressos em papel tipo cartolina para entregar aos alunos.

Escola

**Tarefa:** Ângulos externos de um polígono

Núcleo de Estágio de Matemática.

Data:\_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

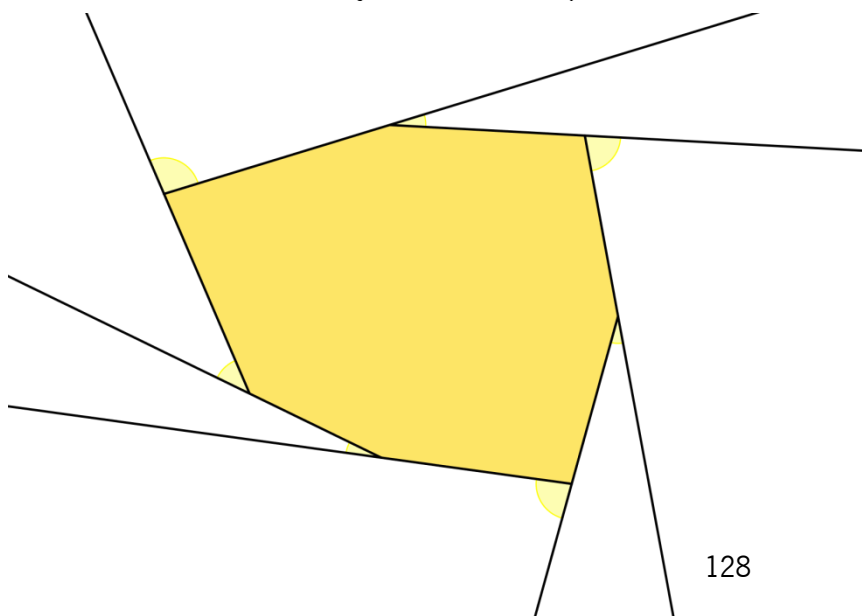
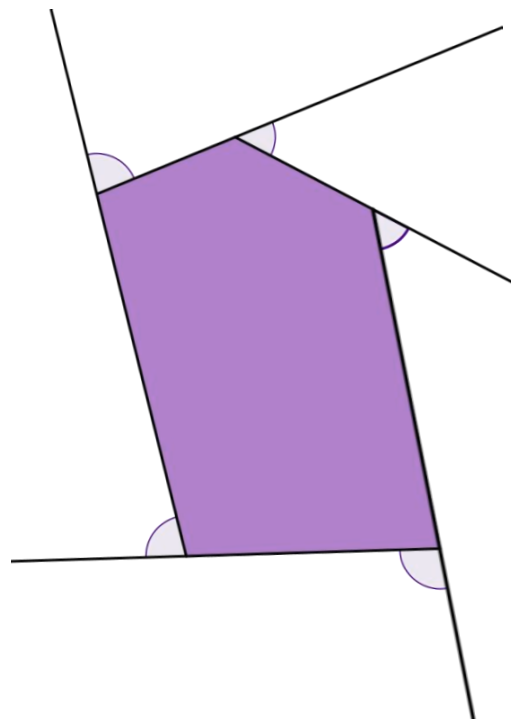
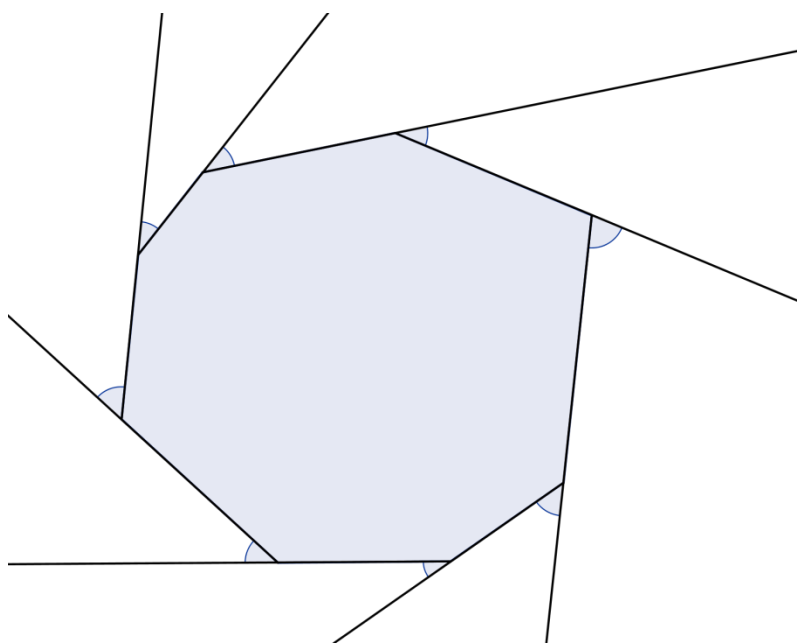
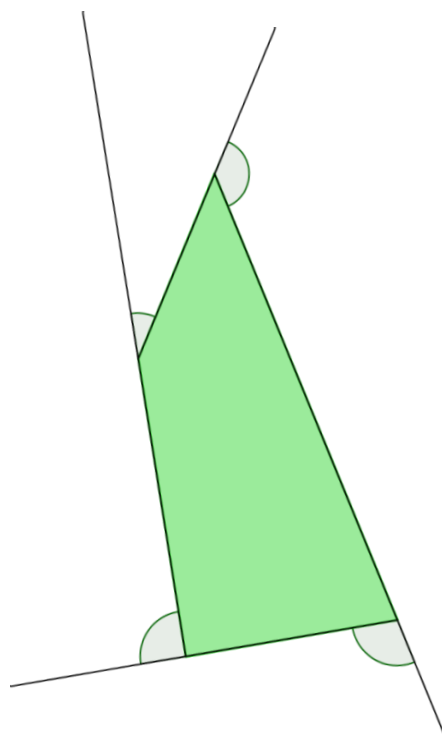
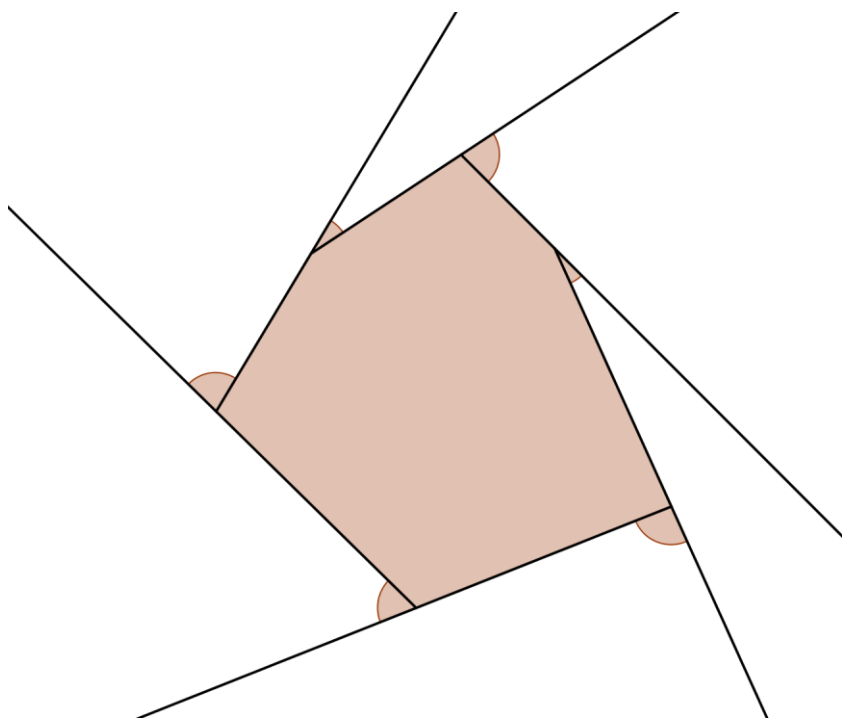
Nome:\_\_\_\_\_ N°:\_\_\_\_\_ Turma\_\_\_\_\_

Para cada um dos polígonos convexos apresentados na tabela, percorre as seguintes etapas:

1. Recorta cada um dos ângulos externos.

1. Preenche a seguinte tabela.

Polígono	Número de lados	Soma das amplitudes dos ângulos externos do polígono
		
		
		
		
		
	n	



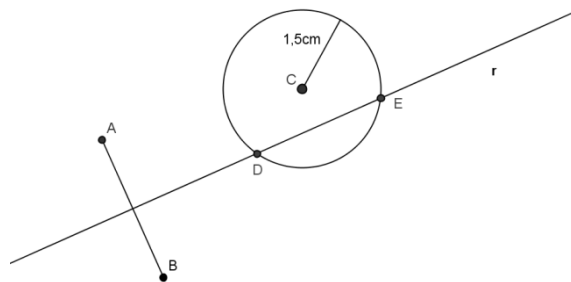


## **ANEXO V**

Questões das Fichas de Avaliação do segundo período.



2. Observa a figura a seguir apresentada, em que  $r$  é a mediatriz de  $[AB]$ .

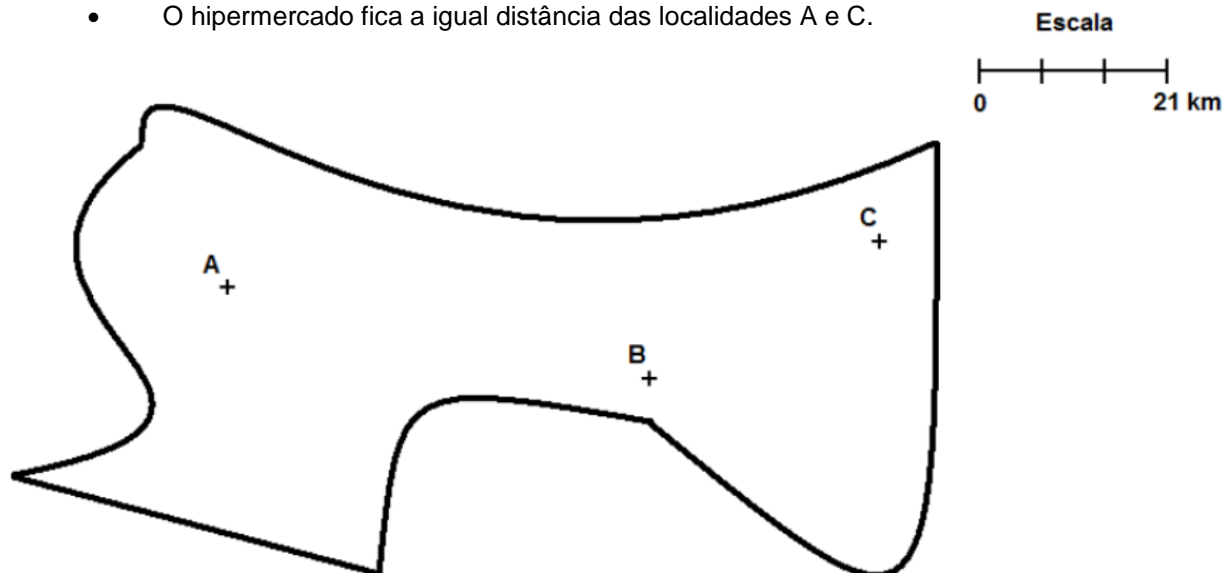


Em relação aos pontos **E** e **D** assinalados na figura, podemos afirmar que são pontos do plano que estão:

- (A) à mesma distância de A e de B e a 1,5 cm de C.      (B) à mesma distância de A e de B e a menos de 1,5 cm de C.  
 (C) à mesma distância de A, B e C.      (D) a 1,5 cm de A, B e C.

7. A figura abaixo representa um mapa de uma região. A mãe do João trabalha numa empresa que pretende construir um hipermercado numa localização que obedece às seguintes condições:

- O hipermercado deve ficar dentro da zona delimitada pelo traço grosso;
- O hipermercado fica a 14 km da localidade B;
- O hipermercado fica a igual distância das localidades A e C.

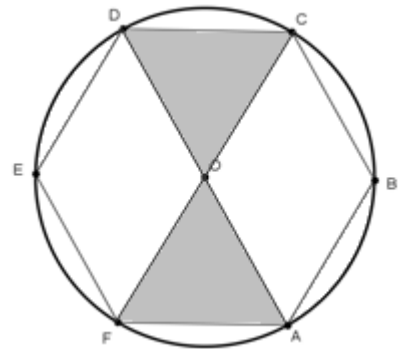


Desenha a lápis, no mapa, uma construção geométrica rigorosa que te permita obter, de acordo com as condições apresentadas, a localização do hipermercado. Assinala esse local com a letra H.

**Não apagues as linhas auxiliares.**

4. Considera o hexágono regular inscrito na circunferência de raio 3 cm. Determina, com aproximação às **milésimas**, o valor da área da região sombreada.

A figura não está desenhada à escala



6. Representa no referencial cartesiano que se segue, o conjunto dos pontos do plano que verificam **simultaneamente** as seguintes condições:

- os pontos estão a mais de uma unidade do ponto  $A(1,1)$  e
- os pontos a menos do que três unidades do ponto A.

